GENAUERE UNTERSUCHUNG DER KURVEN

$$Ax + B\tau = C\frac{\tau}{x}$$

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

VEREINIGTEN FRIEDRICHS-UNIVERSITÄT

HALLE-WITTENBERG

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

VORGELEGT

VON

BRUNO SPIEWECK

AUS BEINRODE

HALLE (SAALE)

DRUCK VON EHRHARDT KARRAS G. M. B. H.

1919

Referent: Herr Geh. Reg.-Rat Prof. Dr. Gutzmer.

Meinen lieben Eltern!

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung 1

I. Die Cesàrosche Bedingung 3

II. Geometrische Ableitung der Cesàroschen Bedingung 5

III. Die Lage der Cesàroschen Geraden im Dreikant 11

IV. Die endlichen Kurvengleichungen 15

V. Das Cesàrosche Strahlensystem 18

1. Die Leitfläche 18

2. Das Strahlensystem 20

3. Die Brennflächen 23

4. Die abwickelbaren Flächen 24

VI. Das Cesàrosche Strahlensystem bei den Kurven $\varkappa^2 h = \tau$ 25

VII. Die geodätischen Linien auf Böschungsflächen, für die $\varkappa^2 h = \tau$ ist 29

VIII. Eine Beziehung zu den Bertrandschen Kurven 36

Einleitung.

E. Cesàro behandelt in seinem Buche „Geometria intrinseca“ [1]) die Frage, unter welchen Umständen bei einer Kurve eine Gerade, die mit dem von der Tangente, der Hauptnormalen und der Binormalen gebildeten Dreikante fest verbunden ist, bei der Bewegung eine abwickelbare Fläche beschreibt. Er gelangt dabei zu einer quadratischen Beziehung, die zwischen Krümmung und Torsion der Kurve bestehen mufs. Aufser den Parallelen zur Tangente in der rektifizierenden Ebene, die bei jeder Raumkurve abwickelbare Flächen beschreiben, gibt es unendlich viele ausgezeichnete Geraden bei den Bertrandschen Kurven und bei denjenigen, die hier untersucht werden sollen. Auf diese Kurvenklasse haben zuerst Cesàro und Andrade hingewiesen. [2])

Im folgenden wird die Cesàrosche Bedingung auch durch geometrische Betrachtungen abgeleitet, und die endlichen Gleichungen der Kurvenklasse werden mittels der Methode der parallelen Zuordnung gewonnen. Ferner wird das von den Cesàroschen Geraden gebildete Strahlensystem untersucht, das als das Cesàrosche Strahlensystem bezeichnet werden soll. Die Ergebnisse werden dann angewendet auf diejenigen geodätischen Linien auf Böschungsflächen, deren Torsion proportional dem Quadrate der Krümmung ist.

[1]) Deutsch von G. Kowalewski, Natürliche Geometrie. Leipzig 1901. S. 189 f.

[2]) Über die Literatur vgl. O. Joachimi, Über Kurven, bei denen die beiden Krümmungen durch eine quadratische Beziehung verknüpft sind. Münster 1911, Dissertation, sowie Fr. Klaucke, Über Raumkurven, zwischen deren beiden Krümmungen eine Beziehung besteht. Halle 1916 Dissertation.

Im letzten Abschnitte wird der Fall betrachtet, dafs eine der unendlich vielen Cesàroschen Geraden eine Kegelfläche beschreibt. Die Cesàrosche Kurve ist alsdann aufs engste verknüpft mit einer Bertrandschen Kurve. Zu dieser Kurvenklasse gehört nämlich der Ort der Schmiegungskugelmittelpunkte. Bei den Kurven, deren Torsion proportional dem Quadrate der Krümmung ist, geht diese Bertrandsche Kurve über in eine Kurve konstanter Torsion.

I. Die Cesàrosche Bedingung.

Eine Gerade, die mit dem Hauptdreikant einer Kurve fest verbunden ist, hat die Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = x + \xi\alpha + \eta l + \zeta\lambda + \sigma(a\alpha + bl + c\lambda) \\ y_1 = y + \xi\beta + \eta m + \zeta\mu + \sigma(a\beta + bm + c\mu) \\ z_1 = z + \xi\gamma + \eta n + \zeta\nu + \sigma(a\gamma + bn + c\nu) \end{cases}$$

Hierbei sind ξ, η, ζ beliebige Konstanten, a, b, c die konstanten Richtungscosinus der Geraden in bezug auf das vom Hauptdreikant der Kurve gebildete Koordinatensystem, x, y, z ein Punkt der Raumkurve, α, β, γ; l, m, n; λ, μ, ν der Reihe nach die Richtungscosinus der Tangente, Hauptnormale und Binormale der Kurve.

Die Gerade beschreibt eine abwickelbare Fläche, wenn

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \alpha + (\xi\varkappa + \zeta\tau)\, l - \eta(a\varkappa + \lambda\tau), \ldots, \ldots \\ a\alpha + bl + c\lambda, \ldots, \ldots \\ (a\varkappa + c\tau)\, l - b(a\varkappa + \lambda\tau), \ldots, \ldots \end{vmatrix} = 0$$

wird,[1]) wenn also zwischen der Krümmung $\varkappa = \frac{1}{\varrho}$ und der Torsion $\tau = \frac{1}{r}$ der Raumkurve die Gleichung

$$(3)\qquad A_1\varkappa^2 + B_1\varkappa\tau + C_1\tau^2 = P_1\varkappa + Q_1\tau$$

besteht, in der zu setzen ist[2]):

$$(4)\qquad \begin{cases} tA_1 = c(\xi b - \eta a), & tB_1 = -a(\xi b - \eta a) - c(c\eta - b\zeta), \\ tC_1 = a(c\eta - b\zeta), & tP_1 = -ac, \quad tQ_1 = -(b^2 + c^2) \end{cases}$$

und

$$(5)\qquad a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

[1]) G. Scheffers, Theorie der Kurven. Leipzig 1910. S. 369.

[2]) E. Salkowski, Die Cesàroschen Kurven. Münch. Berichte 1911. S. 528.

Die Gleichung (3) sei als die allgemeine Cesàrosche Bedingung bezeichnet.

Die spezielle Bedingung

$$A\varkappa + B\tau = C\frac{\tau}{\varkappa} \tag{6}$$

erhält man, wenn in dem Gleichungssystem (4)

$$C_1 = 0 \qquad P_1 = 0 \tag{7}$$

gesetzt wird, d. h. wenn

$$a = 0 \tag{8}$$

ist.

Für die speziellen Cesàroschen Kurven (6) liegen also die Cesàroschen Geraden parallel zur Normalebene.

Aus (4) ergibt sich dann für die Konstanten A, B, C in Gleichung (6)

$$tA = \xi bc, \quad tB = -c^2\eta + bc\zeta, \quad tC = -(b^2 + c^2). \tag{9}$$

Da $b^2 + c^2 = 1$ ist, so ist

$$t = -\frac{1}{C}$$

und es wird

$$\frac{A}{C} = p = -\xi bc, \quad \frac{B}{C} = q = c^2\eta - bc\zeta. \tag{10}$$

Die Konstanten ξ, η, ζ seien so gewählt, dafs sie die Koordinaten des Schnittpunktes einer Cesàroschen Geraden mit der rektifizierenden Ebene, bezogen auf das vom Dreikante gebildete Achsensystem, darstellen, dann ist $\eta = 0$, und aus (10) folgt

$$p = -\xi bc, \qquad q = -\zeta bc. \tag{11}$$

Durch Division der beiden Gleichungen ergibt sich

$$\frac{q}{p} = \frac{\zeta}{\xi} = \operatorname{tg}\varepsilon, \tag{12}$$

d. h. die Schnittpunkte der Cesàroschen Geraden mit der rektifizierenden Ebene liegen auf einer Geraden, die mit der Tangente den Winkel ε einschliefst.

Aus der Gleichung (12) folgt

$$p = h\cos\varepsilon, \qquad q = h\sin\varepsilon, \tag{13}$$

wobei

$$h = \sqrt{p^2 + q^2} \tag{14}$$

ist.

Mit Hilfe dieser Beziehung läfst sich die Bedingung (6) auf die Form bringen:

$$\varkappa \cos\varepsilon + \tau \sin\varepsilon = \frac{\tau}{\varkappa \cdot h}. \tag{15}$$

In dieser Gestalt soll sie hauptsächlich benutzt werden, sie bietet gegenüber der früheren einige Vorteile.

II. Geometrische Ableitung der Cesàroschen Bedingung.

Zu der Cesàroschen Bedingung gelangt man auch durch folgende geometrische Betrachtungen.

Das Hauptdreikant einer Raumkurve wird durch eine Schraubung um die Achse der Schmiegungsschraubenlinie in seine Nachbarlage übergeführt.

Es sollen nun diejenigen mit dem Hauptdreikant fest verbundenen Geraden bestimmt werden, von denen zwei Nachbarlagen sich schneiden, also das Element einer abwickelbaren Fläche bestimmen.

Um diese Geraden für beliebige Raumkurven zu finden, betrachten wir zunächst ihre Schmiegungsschraubenlinie. Bei dieser geht das Hauptdreikant in seine Nachbarlage über mittels einer Drehung um den Winkel dk und einer Schiebung um die Gröfse dp.[1])

Der Winkel zwischen der Tangente und der Schraubungsachse sei H, dann ist

$$dp = u\, dk \operatorname{ctg} H. \tag{1}$$

[1]) Schell-Salkowski, Theorie der Kurven. 1914. S. 112.

Eine mit dem Hauptdreikante fest verbundene Gerade G bilde mit der Schraubungsachse den Winkel ϑ. Soll die Gerade bei der Bewegung des Dreikants eine abwickelbare Fläche beschreiben, so mufs sie Tangente einer Raumkurve sein. Da die Gerade G mit einer festen Richtung einen konstanten Winkel ϑ einschliefst, so ist die Raumkurve eine Schraubenlinie. Diese besitzt die Schraubungsachse als Achse, und ihr Grundkreisradius fällt mit dem kürzesten Abstande v der Geraden von der Achse zusammen. Alle derartigen Geraden berühren also Kreiszylinder, deren Erzeugenden der Schraubungsachse parallel sind, und ihre kürzesten Abstände v von der Achse sind die Lote von den Gratlinienpunkten der erzeugten abwickelbaren Fläche auf die Achse.

Für diese Schraubenlinien gilt entsprechend die Gleichung

(2) $$dp = v\,dk\,\operatorname{ctg}\vartheta.$$

Zwischen v und ϑ besteht also die Beziehung

(3) $$v\,\operatorname{ctg}\vartheta = u\,\operatorname{ctg} H.$$

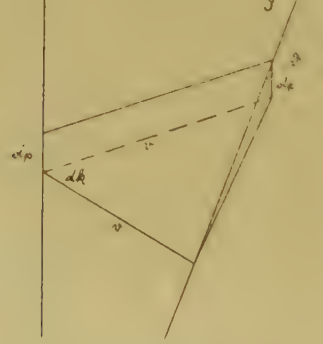

Fig. 1.

Durch diese Relation sind für eine Schraubenlinie alle Geraden bestimmt, die mit dem Hauptdreikant fest verbunden sind und bei der Bewegung abwickelbare Flächen beschreiben.

Die Geraden bilden einen linearen Strahlenkomplex, dessen Achse die Achse der Schraubenlinie ist.

Unter diesen Geraden betrachten wir zunächst diejenigen, welche die Tangente senkrecht schneiden.

Eine solche Gerade G bilde mit der Hauptnormalen den Winkel φ, dann sind ihre auf das Hauptdreikant bezogenen Richtungscosinus

(4) $$0, \quad \cos\varphi, \quad \sin\varphi.$$

Die Schraubungsachse hat die Richtungscosinus

(5) $$\cos H, \quad 0, \quad \sin H.$$

Die Gerade G habe von der Normalebene den Abstand ξ, und der Punkt P_1 der Schraubungsachse, der auf der Hauptnormalen liegt, hat die Koordinaten

(6) $$0, \quad u, \quad 0.$$

Ferner ist

(7) $$\cos\vartheta = \sin\varphi \sin H.$$

Für den Abstand v der Geraden G von der Schraubungsachse ergibt sich dann

(8) $$v = \frac{1}{\sin\vartheta} \begin{vmatrix} -\xi & \cos H & 0 \\ u & 0 & \cos\varphi \\ 0 & \sin H & \sin\varphi \end{vmatrix}$$

oder

(9) $$v = \frac{\xi \cos\varphi \sin H - u \sin\varphi \cos H}{\sin\vartheta}.$$

Gleichung (3) geht dadurch über in die Bedingung

(10) $$\xi \sin\varphi \cos\varphi \sin^2 H = u \operatorname{ctg} H.$$

Hierdurch sind für eine Schraubenlinie alle Cesàroschen Geraden bestimmt, welche die Tangente senkrecht schneiden.

Die Schmiegungsschraubenlinie einer Raumkurve hat mit dieser zwei benachbarte Lagen des Hauptdreikants gemeinsam. Gibt es daher bei der Schmiegungsschraubenlinie eine mit dem Dreikant fest verbundene Gerade, die ihre Nachbarlage schneidet, so bildet sie ebenfalls das Element einer abwickelbaren Fläche, wenn man annimmt, dafs sie mit dem Dreikant der Raumkurve fest verbunden ist. Dabei mufs dann die Bedingung, die für die Schraubenlinie gilt, auch für den ganzen Verlauf der Raumkurve erfüllt sein. Da diese mit der Schmiegungsschraubenlinie zwei benachbarte Dreikante gemeinsam hat, so fällt die rektifizierende Gerade beider Kurven zusammen. Der konstante

Winkel H, unter welchem die Schraubenlinie die Erzeugenden des Zylinders schneidet, und der Winkel der rektifizierenden Geraden der Kurve gegen die Tangente sind also gleich.

Sind $\varkappa = \frac{1}{\varrho}$ und $\tau = \frac{1}{r}$ die Krümmung und die Torsion der Raumkurve, so bestehen die Beziehungen [1])

$$(11) \qquad \sin H = \frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2 + \tau^2}}, \quad \cos H = \frac{-\tau}{\sqrt{\varkappa^2 + \tau^2}}, \quad u = \frac{\varkappa}{\varkappa^2 + \tau^2}.$$

Werden diese Werte in die Gleichung (10) eingesetzt, so erhält man für beliebige Raumkurven die Bedingung

$$\varkappa^2 = \frac{-\tau}{\xi \sin\varphi \cos\varphi},$$

oder, wenn man noch

$$(12) \qquad h = -\xi \sin\varphi \cos\varphi$$

setzt,

$$(13) \qquad \varkappa^2 = \frac{\tau}{h}.$$

Sollen also bei einer Raumkurve Geraden, die mit dem Hauptdreikante fest verbunden sind und die Tangente senkrecht schneiden, bei der Bewegung des Dreikants längs der Kurve abwickelbare Flächen beschreiben, so muß zwischen der Krümmung und der Torsion der Kurve für den ganzen Verlauf der Kurve die Relation (13) bestehen.

Wir betrachten nun bei der Schraubenlinie allgemeiner die Geraden, die parallel zur Normalebene liegen und eine feste Gerade in der rektifizierenden Ebene schneiden. Diese Gerade L gehe durch den Anfangspunkt und bilde mit der Tangente den Winkel ε. Die Richtungscosinus der Schraubungsachse und der Geraden G sind dieselben wie im vorigen Falle, und der Schnittpunkt der beiden Geraden G und L hat die Koordinaten

$$(14) \qquad \xi, \quad 0, \quad \xi \operatorname{tg}\varepsilon$$

in dem vom Dreikante gebildeten Koordinatensysteme. Es wird demnach der Abstand

[1]) Schell-Salkowski, Theorie der Kurven. 1914. S. 30 u. 137.

$$(15)\quad r = \frac{1}{\sin\vartheta}\,(\xi\cos\varphi\sin H - \xi\cos\varphi\,\mathrm{ctg}\,H\,\mathrm{tg}\,\varepsilon - u\sin\varphi\cos H),$$

so dafs die Gleichung (3) übergeht in

$$(16)\qquad \sin^2 H\cos\varepsilon - \sin H\cos H\sin\varepsilon = \frac{u\,\mathrm{ctg}\,H\cos\varepsilon}{\xi\,\sin\varphi\cos\varphi}.$$

Durch diese Relation sind für eine Schraubenlinie alle Cesàroschen Geraden gegeben, die parallel zur Normalebene liegen und eine feste Gerade in der rektifizierenden Ebene schneiden.

Da eine Raumkurve und ihre Schmiegungsschraubenlinie zwei benachbarte Lagen des Hauptdreikants gemeinsam haben, so bildet jede dieser Cesàroschen Geraden auch bei der Raumkurve das Element einer abwickelbaren Fläche. Dabei mufs die Relation (16) für den ganzen Verlauf der Kurve bestehen, und es gelten noch die Beziehungen (11). Es ergibt sich dann für diejenigen Kurven, bei denen es Cesàrosche Geraden gibt, die parallel zur Normalebene liegen und eine feste Gerade in der rektifizierenden Ebene schneiden, die Bedingung

$$(17)\qquad \varkappa\cos\varepsilon + \tau\sin\varepsilon = \frac{\tau}{\varkappa\cdot h_1},$$

wobei

$$(18)\qquad h_1 = -\frac{\xi\sin\varphi\cos\varphi}{\cos\varepsilon}$$

zu setzen ist.

Damit haben wir auf geometrischem Wege die spezielle Cesàrosche Bedingung gefunden, die wir schon im ersten Abschnitte erhalten hatten.

Man kann schliefslich noch ganz allgemein nach der Bedingung fragen, dafs eine bestimmte mit dem Hauptdreikant fest verbundene Gerade bei der Bewegung Raumkurven einhüllt.

Wir betrachten zunächst wieder eine solche Cesàrosche Gerade bei der Schmiegungsschraubenlinie. Ein Punkt P dieser Geraden habe die auf das Hauptdreikant bezogenen Koordinaten ξ, η, ζ, und die Gerade habe die Richtungscosinus a, b, c. Für die Schraubungsachse gilt dasselbe wie in den beiden vorher betrachteten Fällen. Sodann wird die Gröfse v in Gleichung (3)

$$v = \frac{1}{\sin\vartheta}\begin{vmatrix} -\xi\cos H & a \\ u-\eta & 0 & b \\ -\zeta & \sin H & c \end{vmatrix}$$

oder

$$(19)\quad v = \frac{1}{\sin\vartheta}\left[\sin H(\xi b - \eta a + u a) - \cos H(\zeta b - \eta c + u c)\right].$$

Ferner wird

$$(20)\quad \cos\vartheta = a\cos H + c\sin H,$$

so dafs nach Gleichung (3) die Bedingung dafür, dafs bei einer Schraubenlinie eine bestimmte Gerade die gestellte Forderung erfüllt, lautet:

$$(21)\quad \begin{aligned}&\sin^2 H\, c(\xi b - \eta a) + \sin H\cos H\, a(\eta c - \zeta b) + \cos^2 H\,[a(\xi b - \eta a)\\ &\qquad - c(\eta c - \zeta b)] = u\operatorname{ctg} H(b^2 + c^2) - u\, a c.\end{aligned}$$

In den beiden vorhergehenden Fällen wurde gezeigt, dafs jede Cesàrosche Gerade der Schmiegungsschraubenlinie auch bei der Raumkurve eine abwickelbare Fläche beschreibt, wenn die für die Schraubenlinie gefundene Bedingung auch während des ganzen Verlaufes der Kurve erfüllt ist. Dabei sind die Gröfsen $\sin H$, $\cos H$, $\operatorname{ctg} H$ und u noch durch Krümmung und Torsion der Kurve mittels der Beziehung (11) auszudrücken.

Man erhält auf diese Weise aus der Gleichung (21) als Bedingung dafür, dafs eine mit dem Hauptdreikant einer Raumkurve fest verbundene Gerade bei der Bewegung eine abwickelbare Fläche beschreibt, die Gleichung

$$(22)\quad A\boldsymbol{x}^2 + B\boldsymbol{x}\boldsymbol{\tau} + C\boldsymbol{\tau}^2 = P\boldsymbol{x} + Q\boldsymbol{\tau},$$

in der

$$(23)\quad \begin{aligned}&t\,A = c(\xi b - \eta a),\ t\,B = -a(\xi b - \eta a) - c(\eta c - \zeta b),\\ &t\,C = a(\eta c - \zeta b),\ t\,P = -ac,\ t\,Q = -(b^2 + c^2)\end{aligned}$$

zu setzen ist. t ist dabei ein Proportionalitätsfaktor.

Man gelangt also auch durch diese geometrischen Betrachtungen zu der allgemeinen Cesàroschen Bedingung.

III. Die Lage der Cesàroschen Geraden im Dreikant.

Die Cesàroschen Geraden mögen mit der Hauptnormalen den Winkel φ einschliefsen, dann sind ihre Richtungscosinus

$$a = 0, \quad b = \cos\varphi, \quad c = \sin\varphi \tag{1}$$

und es wird aus den Gleichungen (10) des ersten Abschnittes

$$\begin{cases} p = h\cos\varepsilon = -\xi\sin\varphi\cos\varphi \\ q = h\sin\varepsilon = \eta\sin^2\varphi - \zeta\sin\varphi\cos\varphi. \end{cases} \tag{2}$$

Für $\varphi = \text{const.}$ stellen diese Gleichungen eine Gerade dar, die parallel zur Normalebene liegt. Durchläuft der Winkel alle Werte von 0 bis 2π, so beschreibt diese Gerade eine Regelfläche, und zwar ein Konoid, dessen Leitebene die Normalebene der Kurve ist. Eliminiert man φ aus (2), so erhält man die Gleichung einer algebraischen Fläche 3. Ordnung [1])

$$h\left[x^2\sin^2\varepsilon + (y^2+z^2)\cos^2\varepsilon\right] + xyz\cos\varepsilon - x^2y\sin\varepsilon - hxz\sin 2\varepsilon = 0. \tag{3}$$

Das Konoid schneidet die Normalebene im Nullpunkte in einem Nullkreise, die Schmiegungsebene in der Kurve [1])

$$h\left(x^2\sin^2\varepsilon + y^2\cos^2\varepsilon\right) - x^2y\sin\varepsilon = 0 \tag{4}$$

und die rektifizierende Ebene in der Geraden L

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{z}{x}, \tag{5}$$

wie schon im ersten Abschnitt festgestellt worden ist.

Die Projektionen der Cesàroschen Geraden auf die Normalebene hüllen eine Parabel [1])

$$(y - 2h\sin\varepsilon)^2 = y^2 + z^2 \tag{6}$$

ein, deren Brennpunkt im Anfangspunkt M und deren Scheitel auf der Hauptnormalen im Abstande $h\sin\varepsilon$ von M liegt.

[1]) Moschkowitsch, Über Raumkurven, bei denen eine mit dem begleitenden Dreikante fest verbundene Gerade eine abwickelbare Fläche erzeugt. Diss. Jena 1913. S 58 f.

Das Konoid (3) zerfällt in zwei zur Hauptnormalen symmetrische Teile, und zwar liegt die Gerade L nur für $x > 2p$ und für den Anfangspunkt M auf der Fläche.

Die Cesàroschen Geraden schneiden sich paarweise in der Geraden L.[1]) Nur für die Punkte

$$x_1 = \pm 2h\cos\varepsilon, \quad z_1 = \pm 2h\sin\varepsilon$$

fallen zwei Gerade in eine zusammen, d. h. für $\varphi = \pm\frac{1}{2}\pi$.

Die Gröfse h in der Kurvengleichung

$$x\cos\varepsilon + \tau\sin\varepsilon = \frac{\tau}{x\cdot h} \tag{7}$$

bedeutet geometrisch also die halbe Entfernung des Schnittpunktes der Geraden L mit einer dieser zusammenfallenden Geraden des Konoids vom Anfangspunkte M.

Die Projektion jeder der beiden zusammenfallenden Geraden auf die Normalebene berührt die eingehüllte Parabel (6) in dem Punkte, in dem sie von der Binormalen geschnitten wird. Jede Hälfte des Konoids hüllt durch die Projektionen ihrer Erzeugenden je einen der beiden Zweige der Parabel ein, die im Scheitel zusammenstofsen. Die Scheiteltangente ist die Projektion einer den beiden Konoidhälften gemeinsamen Erzeugenden, die im Unendlichen liegt.[2])

Die erste Gleichung (2) liefert zur Bestimmung von φ zwei Werte φ_1 und φ_2, für die

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

ist.

Der Abstand σ des Punktes, in dem die Cesàrosche Gerade die eingehüllte Kurve C_1 berührt, von der Geraden L beträgt

$$\sigma = \frac{1}{b\varkappa} = \frac{\varrho}{\cos\varphi}.$$

Die Punkte der Gratlinien der von den Cesàroschen Geraden beschriebenen abwickelbaren Flächen werden durch die rektifizierende Ebene des Ortes der Schmiegungskugelmittelpunkte ausgeschnitten.[3])

[1]) E. Salkowski, Die Cesàroschen Kurven. Münch. Berichte 1911. S. 537.

[2]) Moschkowitsch, Diss. Jena 1913. S. 60 f.

[3]) Moschkowitsch, Diss. Jena 1913. S. 62; E. Salkowski, Münch. Berichte 1911. S. 537.

Die Gleichung für den Ort der Gratlinienpunkte der abwickelbaren Flächen erhält man also, indem man in der Gleichung (3)

$$y = \frac{1}{\varkappa} = \varrho$$

setzt, d. h.

$$(8) \qquad h\,(x^2 \sin^2\varepsilon + (z^2 + \varrho^2)\cos^2\varepsilon) + xz\varrho\cos\varepsilon - x^2\varrho\sin\varepsilon - h\varrho xz\sin 2\varepsilon = 0.$$

Durch Drehung um den Winkel ψ_1, für den

$$(9) \qquad \sin\psi_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - h\,\frac{\cos 2\varepsilon + \varrho\sin\varepsilon}{\sqrt{h^2\cos^2\varepsilon + (h\sin\varepsilon - \varrho)^2}}\right)}$$

ist, und durch Transformation auf die x'- und y'-Achse geht die Gleichung (8) über in

$$(10) \qquad \frac{x'^2}{A^2} - \frac{z'^2}{B^2} - 1 = 0,$$

wobei zu setzen ist

$$A^2 = \frac{2h\varrho^2\cos^2\varepsilon}{\sqrt{h^2\cos^2\varepsilon + (h\sin\varepsilon - \varrho)^2} - h + \varrho\sin\varepsilon},$$

$$B^2 = \frac{2h\varrho^2\cos^2\varepsilon}{\sqrt{h^2\cos^2\varepsilon + (h\sin\varepsilon - \varrho)^2} + h - \varrho\sin\varepsilon}.$$

Die Gratlinienpunkte der abwickelbaren Flächen liegen also auf einer Hyperbel, deren Mittelpunkt im Krümmungsmittelpunkte liegt.[1])

S. Moschkowitsch[2]) hat die Formeln für die eingehüllten Kurven bei den allgemeinen Cesàroschen Kurven berechnet. Danach ergibt sich für die Kurven

$$\varkappa\cos\varepsilon + \tau\sin\varepsilon = \frac{\tau}{\varkappa \cdot h}$$

folgendes:

Die Richtungscosinus der Tangente, Hauptnormalen und Binormalen der eingehüllten Kurve C_1, bezogen auf das Hauptdreikant der Cesàroschen Kurve C, sind der Reihe nach

[1]) E. Salkowski, Münch. Berichte 1911. S. 537.

[2]) Diss. Jena 1913. S. 16 ff.

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = \cos\varphi, \quad \gamma_1 = \sin\varphi; \tag{11}$$

$$l_1 = -\frac{\varkappa\cos\varphi}{\varkappa_1 s'_1}, \quad m_1 = \frac{\tau\sin\varphi}{\varkappa_1 s'_1}, \quad n_1 = -\frac{\tau\cos\varphi}{\varkappa_1 s'_1} \tag{12}$$

$$\lambda_1 = -\frac{\tau}{\varkappa_1 s'_1}, \quad \mu_1 = -\frac{\varkappa\sin\varphi\cos\psi}{\varkappa_1 s'_1}, \quad \nu_1 = \frac{\varkappa\cos^2\varphi}{\varkappa_1 s'_1}. \tag{13}$$

Ferner ergibt sich für die Krümmung

$$\varkappa = \frac{1}{s'_1}\sqrt{\tau^2 + \varkappa^2\cos^2\varphi} \tag{14}$$

und für die Torsion

$$\tau_1 = \frac{1}{s'_1}\left\{\cos\varphi\,\frac{\varkappa\tau' - \tau\varkappa'}{(\varkappa_1 s'_1)^2} - \varkappa\sin\varphi\right\}. \tag{15}$$

Das Bogenelement wird

$$ds_1 = ds\cdot s'_1 = -\left(\frac{\tau}{\varkappa\sin\varphi} + \frac{\varkappa'}{\varkappa^2\cos\varphi}\right)ds. \tag{16}$$

Fällt man vom Anfangspunkte M des vom Dreikante gebildeten Koordinatensystems auf die Cesàroschen Geraden Lote, so liegen ihre Fufspunkte auf einer Hyperbel in einer Ebene, die zur rektifizierenden Ebene parallel ist und von ihr den Abstand $y_1 = h\sin\varepsilon$ hat. Der Mittelpunkt der Hyperbel liegt auf der Hauptnormalen, und ihre Gleichung lautet, wenn sie durch Drehung um den Winkel $\psi_2 = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ auf die x_1- und z_1-Achse transformiert wird:[1])

$$\frac{z_1^2}{h\sin^2\varepsilon\cos\varepsilon} - \frac{x_1^2}{h^2\sin^2\varepsilon\cos\varepsilon} - 1 = 0. \tag{17}$$
$$\sin^2\frac{\varepsilon}{2} \qquad\qquad \cos^2\frac{\varepsilon}{2}$$

Wächst der Winkel ε bis $\frac{\pi}{2}$, so wird das von den Cesàroschen Geraden gebildete Konoid auf die Normalebene zusammengedrückt, in welcher die Geraden dann die Parabel (6) umhüllen. Für diesen Fall geht die spezielle Cesàrosche Bedingung über in die natürliche Gleichung der Kurven konstanter Krümmung[2])

[1]) O. Joachimi, Dissertation. Münster 1911. S. 22.

[2]) E. Cesàro, Natürliche Geometrie. Deutsch von G. Kowalewski. Leipzig 1901. S. 192.

$$\varkappa = \frac{1}{h},$$

die für uns hier ohne Interesse sind.

Für $\varepsilon = 0$ erhält man die natürliche Gleichung der Kurven, deren Torsion proportional dem Quadrate der Krümmung ist:

(18) $$\varkappa^2 = \frac{\tau}{h_1},$$ [1])

wobei

$$h_1 = -\xi \sin\varphi \cos\varphi$$

ist. Diese Kurven hatten wir durch geometrische Betrachtungen schon im vorigen Abschnitte gewonnen. Da die Cesàroschen Geraden hier die Tangente senkrecht schneiden, so bilden sie ein gerades Konoid dritter Ordnung.[1]) Seine Gleichung lautet

(19) $$x = -h_1 \frac{y^2 + z^2}{y \cdot z}.$$

Die beiden Gleichungen (2) gehen für diese Kurven über in

(20) $$h_1 = -\xi \sin\varphi \cos\varphi, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\xi}{\eta}.$$

IV. Die endlichen Kurvengleichungen.

Um die endlichen Gleichungen der Kurven

(1) $$\varkappa \cos\varepsilon + \tau \sin\varepsilon = \frac{\tau}{\varkappa \cdot h}$$

zu bestimmen, benutzen wir die von Herrn Prof. Dr. E. Salkowski angegebene Methode der Zuordnung von Raumkurven durch parallele Tangenten.[2])

[1]) E. Cesàro, Natürliche Geometrie. S. 192.

[2]) E. Salkowski, Zur Bestimmung aller Raumkurven, für welche zwischen Krümmung, Torsion und Bogenlänge eine gegebene Gleichung besteht. Sitzungsberichte der Berl. Math. Ges. 4, 64—69. 1905.

Ein Punkt der Kurve (1) habe die Koordinaten x, y, z; ds sei das Bogenelement, $d\sigma$ der Winkel benachbarter Tangenten und $d\sigma_1$ der Winkel benachbarter Binormalen, so dafs

$$\frac{d\sigma}{ds} = \varkappa, \quad \frac{d\sigma_1}{ds} = \tau \tag{2}$$

ist.

Ferner seien X, Y, Z die Koordinaten, dS das Bogenelement, K und T Krümmung und Torsion einer zweiten Raumkurve, die der Kurve (1) so zugeordnet ist, dafs die Tangenten in entsprechenden Punkten parallel sind. Dann sind also ihre Richtungscosinus gleich, d. h. es ist

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dX}{dS}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{dY}{dS}, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{dZ}{dS} \tag{3}$$

Die Hauptnormalen und Binormalen in entsprechenden Punkten sind ebenfalls parallel und gleich oder entgegengesetzt gerichtet. Sie seien im folgenden als gleichgerichtet angenommen, da für den anderen Fall die Rechnungen sich im wesentlichen nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Für die zweite Kurve ist in benachbarten Punkten der Winkel zweier Tangenten gleichfalls gleich $d\sigma$, der Winkel zweier Binormalen gleich $d\sigma_1$. Es ist also

$$\frac{d\sigma}{dS} = K, \quad \frac{d\sigma_1}{dS} = T, \tag{4}$$

so dafs hieraus und aus (2) folgt

$$\varkappa\, ds = K\, dS, \quad \tau\, ds = T\, dS. \tag{5}$$

Aus den Gleichungen (3) und (5) ergeben sich dann die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \varkappa\, dx &= K\, dX, & \varkappa\, dy &= K\, dY, & \varkappa\, dz &= K\, dZ, \\ \tau\, dx &= T\, dX, & \tau\, dy &= T\, dY, & \tau\, dz &= T\, dZ. \end{aligned} \tag{6}$$

Werden diese Werte für $\varkappa$ und τ in die Gleichung (1) eingesetzt, so erhält man

$$h\frac{dX}{dx}(K\cos\varepsilon + T\sin\varepsilon) = \frac{T}{K} \tag{7}$$

und zwei analoge Gleichungen.

Daraus ergeben sich die endlichen Gleichungen der Kurven (1) in der Gestalt

$$(8)\qquad \begin{cases} x = h\int \dfrac{K^2\cos\varepsilon + KT\sin\varepsilon}{T}\,dX \\ y = h\int \dfrac{K^2\cos\varepsilon + KT\sin\varepsilon}{T}\,dY \\ z = h\int \dfrac{K^2\cos\varepsilon + KT\sin\varepsilon}{T}\,dZ. \end{cases}$$

Sie lassen sich auf die Form bringen

$$(9)\qquad x = \lambda x_1 + \mu x_2,\quad y = \lambda y_1 + \mu y_2,\quad z = \lambda z_1 + \mu z_2,$$

wo

$$\lambda + \mu = 1$$

ist. Dabei ist

$$(10)\qquad x_1 = \frac{1}{\lambda}\,h\cos\varepsilon\int\frac{K^2}{T}\,dX,\ \ldots,\ \ldots$$

und

$$(11)\qquad x_2 = \frac{1}{\mu}\,h\sin\varepsilon\int K\,dX,\ \ldots,\ \ldots$$

Die Gleichungen (10) stellen eine Kurve dar, deren Torsion proportional dem Quadrate der Krümmung ist, die Gleichungen (11) eine Kurve konstanter Krümmung. Aus der Form der Gleichungen (9) erhält man den Satz:

Bezieht man eine Kurve konstanter Krümmung und eine Kurve, deren Torsion proportional dem Quadrate der Krümmung ist, durch parallele Tangenten aufeinander, so liegen alle Punkte, die die Verbindungsstrecken entsprechender Punkte in einem beliebigen konstanten Verhältnis teilen, auf einer Kurve, bei der zwischen Krümmung und Torsion die Beziehung besteht

$$\varkappa\cos\varepsilon + \tau\sin\varepsilon = \frac{\tau}{\varkappa h}.$$

Die Darstellung ergibt sich nicht unmittelbar aus derjenigen für eine allgemeine Cesàrosche Kurve. Bei dieser ist eine Bertrandsche Kurve in Beziehung zu setzen zu einer Kurve, deren Krümmungsradius eine lineare ganze Funktion des Torsionsradius ist.[1])

[1]) E. Salkowski, Die Cesàroschen Kurven. Münch. Berichte 1911. S. 537.

Beispiele für eine spezielle Cesàrosche Kurve erhält man durch Spezialisierung der Raumkurve (X, Y, Z). So werden im VII. Abschnitte diejenigen Geodätischen auf Böschungsflächen untersucht werden, deren Torsion proportional dem Quadrate der Krümmung ist.

V. Das Cesàrosche Strahlensystem im allgemeinen Falle.

1. Die Leitfläche.

Ein Punkt der speziellen Cesàroschen Kurve

$$x \cos \varepsilon + \tau \sin \varepsilon = \frac{\tau}{\varkappa h} \tag{1}$$

habe die Koordinaten (x, y, z). Wie wir vorher gesehen hatten, schneiden sich die ∞^1 Cesàroschen Geraden in der rektifizierenden Ebene auf der Geraden L, die mit der Tangente den Winkel ε einschliefst. Bewegt sich das Hauptdreikant längs der Kurve (1), so bilden die Cesàroschen Geraden ein Strahlensystem. Zu seiner analytischen Darstellung gehen wir auf die Formeln des dritten Abschnittes zurück.

Die Leitfläche der Linienkongruenz sei die Fläche, welche die Gerade L beschreibt, wenn das Hauptdreikant längs der Ausgangskurve gleitet. Der Abstand eines Punktes (x_1, y_1, z_1) der Leitfläche vom Kurvenpunkte (x, y, z) ist

$$t \quad \frac{\xi}{\cos \varepsilon}. \tag{2}$$

Da nach Gleichung (2) Abschnitt III

$$\xi = -\frac{2h \cos \varepsilon}{\sin 2\varphi} \tag{3}$$

ist, so folgt

$$t = -\frac{2h}{\sin 2\varphi}. \tag{4}$$

Die Parameter seien die Bogenlänge s der Ausgangskurve und der Winkel φ, den eine Cesàrosche Gerade mit der Hauptnormalen einschliefst.

Die Gleichungen der Leitfläche lauten dann:

$$(5)\qquad \begin{cases} x_1 = x - \dfrac{2h}{\sin 2\varphi}(\alpha \cos\varepsilon + \lambda \sin\varepsilon) \\ y_1 = y - \dfrac{2h}{\sin 2\varphi}(\beta \cos\varepsilon + \mu \sin\varepsilon) \\ z_1 = z - \dfrac{2h}{\sin 2\varphi}(\gamma \cos\varepsilon + \nu \sin\varepsilon). \end{cases}$$

Ihre Fundamentalgröfsen erster Ordnung werden

$$(6)\qquad E = 1 - \frac{4\tau^2}{\varkappa^2 \sin^2 2\varphi},\quad F = \frac{4h \cos 2\varphi \cos\varepsilon}{\sin^2 2\varphi},\quad G = \left(\frac{4h \cos 2\varphi}{\sin^2 2\varphi}\right)^2,$$

und demnach ist

$$(7)\qquad D = \frac{4h \cos 2\varphi}{\varkappa \sin^3 2\varphi}\sqrt{4\tau^2 + \varkappa^2 \sin^2 2\varphi \sin^2\varepsilon}.$$

Das Quadrat des Bogenelementes läfst sich dann auf die Form bringen

$$(8)\qquad ds^2 = (\sqrt{G}\, d\varphi + \cos\varepsilon\, ds)^2 + \frac{D^2}{G} ds^2.$$

Ferner sind die Richtungscosinus der Flächennormalen

$$(9)\qquad \bar{X} = \frac{2\tau(\lambda \cos\varepsilon - \alpha \sin\varepsilon) - l\varkappa \sin 2\varphi \sin\varepsilon}{\sqrt{4\tau^2 + \varkappa^2 \sin^2 2\varphi \sin^2\varepsilon}},\ \ldots,\ \ldots$$

Von den Fundamentalgröfsen zweiter Ordnung wird $N = 0$, da die Leitfläche eine Regelfläche ist. Es ergibt sich

$$(10)\qquad \begin{cases} L = \dfrac{2\tau^2(\tau \cos\varepsilon - \varkappa \sin\varepsilon) - \varkappa^3 \sin^2 2\varphi \sin\varepsilon}{\varkappa \sin 2\varphi \sqrt{4\tau^2 + \varkappa^2 \sin^2 2\varphi \sin^2\varepsilon}}, \\ M = \dfrac{-4\tau \operatorname{ctg} 2\varphi \sin\varepsilon}{\sqrt{4\tau^2 + \varkappa^2 \sin^2 2\varphi \sin^2\varepsilon}}, \\ N = 0. \end{cases}$$

Daher wird das Gaufssche Krümmungsmafs

$$(11)\qquad K = \frac{\varkappa^2 \tau^2}{h^2} \sin^4 2\varphi \sin^2\varepsilon.$$

Die Parameterlinien $s = \text{const.}$ und $\varphi = \text{const.}$ bilden miteinander den Winkel ω, für den

$$(12)\quad \sin\omega = \sqrt{\frac{4\tau^2 + x^2 \sin^2 2\varphi \sin^2\varepsilon}{4\tau^2 + x^2 \sin^2 2\varphi}}, \quad \cos\varepsilon = \frac{x \sin\varphi \cos\varepsilon}{\sqrt{4\tau^2 + x^2 \sin^2 2\varphi}}$$

und daher

$$(13)\quad \operatorname{tg}\omega = \frac{\sqrt{4\tau^2 + x^2 \sin^2 2\varphi \sin^2\varepsilon}}{x \sin\varphi \cos\varepsilon}$$

ist.

2. Das Strahlensystem.

Die Richtungscosinus der Cesàroschen Geraden im Bezug auf das vom Hauptdreikante gebildete Achsensystem lauten

$$(14)\quad X = l\cos\varphi + \lambda \sin\varphi, \ \ldots, \ \ldots$$

Sind $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ die Koordinaten eines Punktes P auf dem durch den Punkt P_1 (x_1, y_1, z_1) der Leitfläche hindurchgehenden Strahle, und ist σ die Entfernung des Punktes P vom Punkte P_1, so ist

$$(15)\quad \bar{\xi} = x_1 - \sigma X, \quad \bar{\eta} = y_1 - \sigma Y, \quad \bar{\zeta} = z_1 - \sigma Z.$$

Dies sind die Gleichungen des Strahlensystems.

Zur Berechnung der Kummerschen Fundamentalgrößen[1]) bilden wir die partiellen Ableitungen nach s und nach φ

$$(16)\quad \frac{\partial x_1}{\partial s} = \alpha - l\frac{2\tau}{x \sin 2\varphi}, \ \ldots, \ \ldots$$

$$(17)\quad \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} = \frac{4h\cos 2\varphi}{\sin^2 2\varphi}(\alpha\cos\varepsilon + \lambda\sin\varepsilon), \ \ldots, \ \ldots$$

$$(18)\quad \frac{\partial X}{\partial s} = -\alpha x\cos\varphi - \tau(\lambda\cos\varphi - l\sin\varphi), \ \ldots, \ \ldots$$

$$(19)\quad \frac{\partial X}{\partial \varphi} = \lambda\cos\varphi - l\sin\varphi, \ \ldots, \ \ldots$$

Hieraus ergeben sich die Werte

[1]) Kommerell, Theorie der Strahlensysteme. Sammlung Schubert LXII. Leipzig 1911. § 21.

$$(20)\quad \begin{cases} E_0 = \tau^2 + \varkappa^2 \cos^2\varphi, \quad F_0 = -\tau, \quad G_0 = 1, \\ L = \varkappa\cos\varphi + \dfrac{2\tau^2 \sin\varphi}{\varkappa \sin 2\varphi}, \quad M = \dfrac{4\tau\cos\varphi\cos 2\varphi}{\varkappa \sin^2 2\varphi}, \\ M' = -\dfrac{2\tau\sin\varphi}{\varkappa\sin 2\varphi}, \quad N = -\dfrac{4h\cos\varphi\cos 2\varphi\sin\varepsilon}{\sin^2 2\varphi}. \end{cases}$$

Auf jedem Strahle liegen zwei Grenzpunkte und zwei Brennpunkte. Die Abstände der Grenzpunkte auf einem Strahle von dem Punkte, in dem dieser die Leitfläche trifft, erhält man aus der Gleichung [1])

$$(21)\quad (E_0 G_0 - F_0^2)\, r^2 - \{E_0 N - F_0 (M + M') + G_0 L\}\, r + LN - \left(\frac{M + M'}{2}\right)^2 = 0$$

und die Abstände der beiden Brennpunkte auf jedem Strahle aus [2])

$$(22)\quad \{E_0 G_0 - F_0^2\}\,\bar\varrho^2 - \{E_0 N - F_0 (M + M') + G_0 L\}\,\bar\varrho + LN - MM' = 0.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs ein Strahlensystem die Normalen einer Fläche bildet, ist das Zusammenfallen der Grenzpunkte und der Brennpunkte. Dann mufs $M = M'$ sein.[3]) Diese Bedingung ist aber hier nicht erfüllt, d. h.

Das Strahlensystem bei den speziellen Cesàroschen Kurven kann niemals eine Normalenkongruenz sein.

Werden in die Gleichung (22) die Werte für die Kummerschen Fundamentalgröfsen eingesetzt, so ergibt sich

$$(23)\quad \begin{cases} \bar\varrho_1 = \dfrac{1}{\varkappa\cos\varphi} = \dfrac{\varrho}{\cos\varphi}, \\ \bar\varrho_2 = \dfrac{4\cos 2\varphi}{\varkappa^3 \cos\varphi \sin^2 2\varphi}\{\tau^2 - h\varkappa\sin\varepsilon\,(\tau^2 + \varkappa^2\cos^2\varphi)\}. \end{cases}$$

Aus (23) folgt sowohl $\bar\varrho_1 = \text{const.}$ als auch $\bar\varrho_2 = \text{const.}$ nur für die gewöhnliche Schraubenlinie.

Die ersten Brennpunkte haben von der rektifizierenden Ebene den Abstand $\eta_1 = \varrho$, sie sind also die Gratlinienpunkte der von den Cesàroschen Geraden beschriebenen abwickelbaren Flächen und liegen auf der Hyperbel (10) (Abschnitt III) in der rektifizierenden Ebene der Polarkurve.

---

[1]) Kommerell, a. a. O. S. 103. [2]) a. a. O. S. 107. [3]) a. a. O. S. 98.

Die einem bestimmten Punkte der Ausgangskurve entsprechenden zweiten Brennpunkte liegen auf einer Raumkurve, deren Gleichungen sind

$$(24)\quad \begin{cases} \xi_2' = -\dfrac{2h\cos\varepsilon}{\sin 2\varphi}, & \eta_2' = \dfrac{4\cos 2\varphi}{\varkappa^3 \sin^2 2\varphi}\{\tau^2 - h\varkappa\sin\varepsilon(\tau^2 - \varkappa^2\cos^2\varphi)\}, \\ \zeta_2' = \dfrac{4\cos 2\varphi\,\operatorname{tg}\varphi}{\varkappa^3\sin^2 2\varphi}\{\tau^2 - h\varkappa\sin\varepsilon(\tau^2 - \varkappa^2\cos^2\varphi)\} - \dfrac{2h\sin\varepsilon}{\sin 2\varphi}. \end{cases}$$

Sie ist algebraisch und liegt auf dem Konoid, das von den Cesàroschen Geraden gebildet wird. Die Ableitungen nach φ sind

$$\frac{d\xi_2'}{d\varphi} = \frac{4h\cos 2\varphi\cos\varepsilon}{\sin^2 2\varphi},$$

$$\frac{d\eta_2'}{d\varphi} = \frac{4h\cos 2\varphi\sin\varepsilon}{\sin^2 2\varphi} - \frac{8(1+\cos^2 2\varphi)}{\varkappa^3\sin^3 2\varphi}\{\tau^2 - h\varkappa\sin\varepsilon(\tau^2+\varkappa^2\cos^2\varphi)\},$$

$$\frac{d\zeta_2'}{d\varphi} = \frac{4h\cos 2\varphi\sin\varepsilon}{\varkappa\sin^2 2\varphi}(\varkappa + \operatorname{tg}\varphi\sin 2\varphi) - \frac{4(1-\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi)}{\varkappa^3\cos^2\varphi\sin^2 2\varphi}\{\tau^2 - h\varkappa\sin\varepsilon(\tau^2 - \varkappa^2\cos^2\varphi)\}.$$

Für $\varphi = \pm\frac{\pi}{4}$ wird

$$(25)\qquad \xi_2' = \mp 2h\cos\varepsilon, \quad \eta_2' = 0, \quad \zeta_2' = \mp 2h\sin\varepsilon,$$

und für das Bogenelement erhält man

$$ds_2' = \frac{8}{\varkappa^3}\{\tau^2 - h\varkappa\sin\varepsilon(\tau^2 + \tfrac{1}{2}\varkappa^2)\}\,d\varphi.$$

Dann haben an dieser Stelle die Richtungscosinus der Tangente die Werte

$$(26)\qquad \alpha = 0, \quad \beta = \mp\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \gamma = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Die Cesàroschen Geraden $\varphi = \pm\frac{\pi}{4}$ sind also Tangenten der Raumkurve (24).

Diese ändert sich ebenso wie der Ort der ersten Brennpunkte zugleich mit $\varkappa$ und τ, wenn sich das Hauptdreikant längs der Ausgangskurve bewegt. Nur bei der gewöhnlichen Schraubenlinie bleibt sie konstant.

3. Die Brennflächen.

Die Hyperbel (10) (Abschnitt III) beschreibt bei der Bewegung die erste Brennfläche.

Die Gleichungen der ersten Brennfläche lauten demnach

$$(27)\quad \bar{\xi}_1 = x - \frac{2h}{\sin 2\varphi}(\alpha\cos\varepsilon + \lambda\sin\varepsilon) + \frac{1}{\varkappa\cos\varphi}(l\cos\varphi + \lambda\sin\varphi),\ \ldots$$

Daraus ergeben sich die partiellen Ableitungen nach s und φ

$$(28)\quad \frac{\partial\bar{\xi}_1}{\partial s} = -\left(\frac{\tau}{\varkappa\sin\varphi} + \frac{\varkappa'}{\varkappa^2\cos\varphi}\right)(l\cos\varphi + \lambda\sin\varphi),\ \ldots,\ \ldots$$

und

$$(29)\quad \frac{\partial\bar{\xi}_1}{\partial\varphi} = \frac{\lambda}{\varkappa\cos^2\varphi} + \frac{4h\cos 2\varphi}{\sin^2 2\varphi}(\alpha\cos\varepsilon + \lambda\sin\varepsilon),\ \ldots,\ \ldots$$

Für einen bestimmten Winkel φ zieht sich die eingehüllte Kurve in einen Punkt zusammen, wenn $\frac{\partial\bar{\xi}_1}{\partial s}$, $\frac{\partial\bar{\eta}_1}{\partial s}$, $\frac{\partial\zeta_1}{\partial s}$ zu Null werden. Dieser Fall wird im letzten Abschnitte ausführlich behandelt.

Die Fundamentalgrößen erster Ordnung der ersten Brennfläche haben folgende Werte:

$$(30)\quad \begin{cases} E_1 = \left(\frac{\tau}{\varkappa\sin\varphi} + \frac{\varkappa'}{\varkappa^2\cos\varphi}\right)^2, \quad F_1 = -A_2\sqrt{E_1}\sin\varphi, \\ G_1 = A_1^2 + A_2^2, \end{cases}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(31)\quad A_1 = \frac{4h\cos 2\varphi\cos\varepsilon}{\sin^2 2\varphi}, \quad A_2 = \frac{1}{\varkappa\cos\varphi} + \frac{4h\cos 2\varphi\sin\varepsilon}{\sin^2 2\varphi}$$

Ferner wird

$$(32)\quad D_1 = \sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2\cos^2\varphi}\,\sqrt{E_1}.$$

Das Quadrat des Bogenelementes nimmt dann die Form an

$$(33)\quad ds_1^2 = \{\sqrt{E_1}\,ds - A_2\sin\varphi\,d\varphi\}^2 + \frac{D_1^2}{E_1}d\varphi^2.$$

Die Flächennormale hat die Richtungscosinus

$$(34)\quad X_1 = \frac{A_1(\lambda\cos\varphi - l\sin\varphi) - A_2\alpha\cos\varphi}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2\cos^2\varphi}},\ \ldots,\ \ldots$$

Die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung der ersten Brennfläche sind

$$(35)\quad \begin{cases} L_1 = \dfrac{\sqrt{E_1}\,(A_1 \varkappa \tau \cos^2\varphi - A_2)}{\varkappa \cos^2\varphi \sqrt{A_1^2 - A_2^2 \cos^2\varphi}}, \quad M_1 = \dfrac{-A_1 \sqrt{E_1}}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2 \cos^2\varphi}}, \\ N_1 = \dfrac{2h\,(4\cos\varepsilon - A_1 \varkappa \sin^2 2\varphi \sin\varepsilon)}{\varkappa \sin\varphi \sin^2 2\varphi \sqrt{A_1^2 + A_2^2 \cos^2\varphi}}. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich für das Gaußsche Krümmungsmaß

$$(36)\quad K_1 = \frac{1}{\varrho_1} \cdot \frac{1}{\varrho_2} = \frac{4h(4\cos\varepsilon - A_1\varkappa\sin^2 2\varphi \sin\varepsilon)(A_1\varkappa\tau\cos^2\varphi - A_2) - A_1^2}{\varkappa^2 \cos\varphi \sin^3 2\varphi\,(A_1^2 - A_2^2\cos^2\varphi)^2} \sqrt{E_1}\,\varkappa^2 \cos\varphi \sin^3 2\varphi$$

Die Parameterlinien auf der ersten Brennfläche sind die Kurven $\varphi = \text{const.}$ und die Hyperbeln, auf denen die Brennpunkte liegen, die zu demselben Punkte der Ausgangskurve gehören. Sie bilden miteinander den Winkel ω_1, für den

$$(37)\quad \sin\omega_1 = \frac{\sqrt{A_1^2 + A_2^2\cos^2\varphi}}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}, \quad \cos\omega_1 = \frac{-A_2\sin\varphi}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}}$$

ist.

Für die zweiten Brennpunkte war

$$\bar{\varrho}_2 = \frac{4\cos 2\varphi}{\varkappa^3 \cos\varphi \sin^2 2\varphi}\,\{\tau^2 - h\varkappa\sin\varepsilon\,(\tau^2 - \varkappa^2\cos^2\varphi)\}.$$

Führt man noch zur Abkürzung die Größen

$$(38)\quad B = \tau^2 - h\varkappa\sin\varepsilon\,(\tau^2 - \varkappa^2\cos^2\varphi)$$

ein, dann lauten die Gleichungen der zweiten Brennfläche

$$(39)\quad \bar{\xi}_2 = x - \frac{2h}{\sin 2\varphi}(\alpha\cos\varepsilon + \lambda\sin\varepsilon) + \frac{4B\cos 2\varphi}{\varkappa^3 \cos\varphi \sin^2 2\varphi}(\lambda\cos\varphi + \lambda\sin\varphi).$$

nebst zwei analogen Gleichungen.

4. Die abwickelbaren Flächen.

Bei dem betrachteten Strahlensysteme sind also die beiden Scharen von abwickelbaren Flächen, in die sich die Strahlen zusammenfassen lassen, reell. Sie schneiden aus der Leitfläche

zwei Scharen von Kurven K_1 und K_2 aus, deren Fortschreitungsrichtungen $d\varphi : ds$ auf der Leitfläche sich aus der Gleichung

$$\begin{vmatrix} L\,ds + M\,d\varphi & E_0\,ds + F_0\,d\varphi \\ M\,ds + N\,d\varphi & F_0\,ds + G_0\,d\varphi \end{vmatrix} = 0 \tag{40}$$

ergeben.[1]) Die Entwicklung der Determinante lautet

$$d\varphi \left[d\varphi - \frac{C_1\,\varkappa^2 \sin^2\varphi\,ds}{\tau\,(A_2\,\varkappa \sin^2\varphi - 1)} \right] = 0. \tag{41}$$

Diese Gleichung liefert die Werte

$$\begin{cases} \text{I.} & d\varphi = 0; \\ \text{II.} & \dfrac{d\varphi}{ds} = \dfrac{C_1\,\varkappa^2 \sin^2\varphi}{\tau\,(A_2\,\varkappa \sin^2\varphi - 1)}. \end{cases} \tag{42}$$

Dabei ist

$$C_1 = 1 - \frac{4\,B\cos 2\varphi}{\varkappa^2 \sin^2 2\varphi}.$$

Für die Kurven K_1 ist also $\varphi = \varphi_1 = \text{const}$. Dies ergibt sich auch unmittelbar aus der Bedingung, daſs die mit dem Dreikante fest verbundenen Geraden abwickelbare Flächen beschreiben sollen.

Die Gleichungen der Kurven K_1 sind

$$\bar{x}_1 = x - \frac{2\,h}{\sin 2\varphi}\,(\alpha \cos\varepsilon + \lambda \sin\varepsilon). \tag{43}$$

Die Formeln für diese Gratlinien der abwickelbaren Flächen sind schon im dritten Abschnitte behandelt worden.

VI. Das Cesàrosche Strahlensystem bei den Kurven $\varkappa^2 h = \tau$.

Die erhaltenen Formeln vereinfachen sich zum Teil sehr wesentlich, wenn der Winkel $\varepsilon = 0$ wird, d. h. für die Kurven

$$\varkappa^2 h = \tau. \tag{1}$$

Die Leitfläche des Strahlensystems ist die Tangentenfläche der Ausgangskurve. Ihre Gleichungen sind

[1]) Kommerell, a. a. O. S. 107.

$$(2) \qquad x_1 = x - \frac{2h}{\sin 2\varphi}\alpha, \quad y_1 = y - \frac{2h}{\sin 2\varphi}\beta, \quad z_1 = z - \frac{2h}{\sin 2\varphi}\gamma$$

und die Fundamentalgrößen erster Ordnung haben die Werte

$$(3) \qquad E = 1 + \frac{4h^2\varkappa^2}{\sin^2 2\varphi}, \quad F = \frac{4h\cos 2\varphi}{\sin^2 2\varphi}, \quad G = F^2,$$

so daß man für das Bogenelement erhält

$$(4) \qquad d\bar{s}^2 = \left(\frac{2h\varkappa}{\sin 2\varphi}\right)^2 ds^2 + (ds + F\,d\varphi)^2.$$

Ferner ist

$$(5) \qquad D = \sqrt{EG - F^2} = \frac{8h^2\varkappa\cos 2\varphi}{\sin^3 2\varphi}.$$

Da die Tangentenfläche in die Ebene abwickelbar ist, so sind die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung

$$(6) \qquad L = \frac{h^2\varkappa^2}{\sin 2\varphi}, \quad M = 0, \quad N = 0,$$

und das Gaußsche Krümmungsmaß wird zu Null. Für die mittlere Krümmung ergibt sich

$$(7) \qquad H = \varkappa \sin 2\varphi$$

und für den Winkel der Parameterlinien

$$(8) \qquad \operatorname{tg}\omega = \frac{2h\varkappa}{\sin 2\varphi}.$$

Wie wir im dritten Abschnitte gesehen hatten, wird das Konoid, das die Cesàroschen Geraden bilden, ein gerades, dessen Gleichung die Form $x = f(y, z)$ hat.

Von den Kummerschen Fundamentalgrößen wird $N = 0$, und die Abstände der einem bestimmten Punkte der Ausgangskurve entsprechenden Brennpunkte von der Tangente vereinfachen sich zu

$$(9) \qquad \bar{\varrho}_1 = \frac{1}{\varkappa\cos\varphi}, \quad \bar{\varrho}_2 = \frac{4h^2\varkappa\cos 2\varphi}{\cos\varphi\sin^2 2\varphi}.$$

Bildet man $\bar{\varrho}_1 \cdot \bar{\varrho}_2$, so ergibt sich

$$(10) \qquad \bar{\varrho}_1 \cdot \bar{\varrho}_2 = \frac{4h^2\cos 2\varphi}{\cos^2\varphi\sin^2 2\varphi},$$

d. h.

Das Produkt der Abstände der beiden Brennpunkte von der Tangente ist für eine bestimmte Cesàrosche Gerade während des ganzen Verlaufes der Kurve konstant.

Die zu einem bestimmten Punkte der Ausgangskurve gehörigen ersten Brennpunkte liegen auf der Hyperbel (10) (Abschnitt III).

Die Gleichungen der ersten Brennfläche lauten

$$\xi_1 = x - \frac{2h}{\sin 2\varphi}\,\alpha + \frac{1}{\varkappa}(l + \lambda \operatorname{tg}\varphi), \quad \ldots, \quad \ldots, \tag{11}$$

und die im vorigen Abschnitte eingeführten Gröfsen A_1 und A_2 erhalten die Werte

$$A_1 = \frac{4h\cos 2\varphi}{\sin^2 2\varphi}, \qquad A_2 = \frac{1}{\varkappa\cos^2\varphi}.$$

Danach sind die Fundamentalgröfsen erster Ordnung der ersten Brennfläche

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \left(\frac{h\varkappa}{\sin\varphi} + \varkappa^2\frac{\varkappa'}{\cos\varphi}\right)^2, \qquad F_1 = \frac{-\operatorname{tg}\varphi}{\varkappa\cos\varphi}\sqrt{E_1}, \\ G_1 &= \frac{1}{\varkappa^2\cos^2\varphi} + \frac{16h^2\cos^2 2\varphi}{\sin^4 2\varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Für das Bogenelement ergibt sich also

$$ds_1^2 = \left\{\sqrt{E_1}\,ds - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\varkappa\cos\varphi}\,d\varphi\right\}^2 + \frac{D_1^2}{E_1}\,d\varphi^2, \tag{13}$$

wobei zu setzen ist

$$D_1 = \sqrt{E_1}\,\frac{\sqrt{\sin^4 2\varphi + 16h^2\varkappa^2\cos^2\varphi\cos^2 2\varphi}}{\varkappa\cos\varphi\sin^2 2\varphi}. \tag{14}$$

Die Richtungscosinus der Flächennormalen lauten

$$X_1 = \frac{4h\varkappa\cos\varphi\cos 2\varphi\,(\lambda\cos\varphi - l\sin\varphi) - \alpha\sin^2 2\varphi}{\sqrt{\sin^4 2\varphi + 16h^2\varkappa^2\cos^2\varphi\cos^2 2\varphi}}. \tag{15}$$

Für $\varphi = \pm\frac{\pi}{4}$ ist die Flächennormale der Tangente der Ausgangskurve parallel und entgegengesetzt gerichtet.

Die einem bestimmten Punkte der Ausgangskurve entsprechenden zweiten Brennpunkte liegen auf einer Raumkurve, deren Gleichungen lauten

$$(16)\quad \xi_2' = -\frac{2h}{\sin 2\varphi},\quad \eta_2' = \frac{4h^2 \varkappa \cos 2\varphi}{\sin^2 2\varphi},\quad \zeta_2' = \frac{4h^2 \varkappa \cos 2\varphi \operatorname{tg}\varphi}{\sin^2 2\varphi}.$$

Sie ist algebraisch und zerfällt in zwei Zweige, die auf den beiden Hälften des Konoids liegen. Für $\varphi = \pm\frac{\pi}{4}$ wird

$$\xi_2' = \mp 2h, \quad \eta_2' = \zeta_2' = 0.$$

Die Tangente der Raumkurve hat die Richtungscosinus

$$(17)\quad \begin{cases} \alpha_2' = \dfrac{4h\cos 2\varphi}{\sin^2 2\varphi}\cdot\dfrac{d\varphi}{ds_2'}, & \beta_2' = \dfrac{-8h^2\varkappa(1+\cos^2 2\varphi)}{\sin^3 2\varphi}\cdot\dfrac{d\varphi}{ds_2'}, \\ \gamma_2' = \dfrac{-4h^2\varkappa}{\cos^2\varphi \sin^2 2\varphi}(1-\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi)\dfrac{d\varphi}{ds_2'}, \end{cases}$$

wobei

$$(18)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{ds_2'}{d\varphi}\right)^2 = \dfrac{16h^2}{\cos^4\varphi \sin^4 2\varphi}\{\cos^4\varphi\cos^2 2\varphi \sin^2 2\varphi \\ \quad + h^2\varkappa^2[\sin^4 2\varphi(1-\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi) - 4\cos^4\varphi(1-\cos^2 2\varphi)]^2\} \end{cases}$$

ist. Für $\varphi = \pm\frac{\pi}{4}$ wird

$$\frac{ds_2'}{d\varphi} = 8h^2\varkappa\sqrt{2}$$

und daher

$$\alpha_2' = 0, \quad \beta_2' = +\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \gamma_2' = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Die Cesàroschen Geraden $\varphi = \pm\frac{\pi}{4}$ sind also Tangenten der Raumkurve.

Die Gleichungen der zweiten Brennfläche sind

$$(19)\quad \bar{\xi}_2 = x - \frac{2h\alpha}{\sin 2\varphi} + \frac{4h^2\varkappa\cos 2\varphi}{\sin^2 2\varphi}(l+\lambda\operatorname{tg}\varphi),\ \ldots,\ \ldots$$

Für die Kurven K_1 und K_2 auf der Leitfläche, die von den beiden Scharen von abwickelbaren Flächen des Strahlensystems ausgeschnitten werden, ist

$$(20)\qquad \begin{cases} \text{I.} & \varphi = \text{const.} \\ \text{II.} & \dfrac{d\varphi}{ds} = h\varkappa^2 - \dfrac{\sin^2 2\varphi}{4h\cos 2\varphi} \end{cases}$$

Die Gleichungen der Kurven K_1 lauten demnach

$$(21)\qquad \bar{x} = x - \frac{2h\alpha}{\sin 2\varphi}, \quad \bar{y} = y - \frac{2h\beta}{\sin 2\varphi}, \quad \bar{z} = z - \frac{2h\gamma}{\sin 2\varphi}.$$

Sie bilden die eine Schar von Parameterkurven auf der Leitfläche.

VII. Die geodätischen Linien auf Böschungsflächen, für die $\varkappa^2 \cdot h = \tau$ ist.

Eine Böschungsfläche ist eine Fläche, deren Tangentenebenen mit einer festen Richtung einen konstanten Winkel bilden. Ihre geodätischen Linien sind identisch mit den Filarevolventen der Schraubenlinien.[1]) Es sollen hier diejenigen unter ihnen bestimmt werden, die zu den Kurven

$$(1)\qquad \varkappa^2 = \frac{\tau}{h}$$

gehören.

Die Gratlinie einer Böschungsfläche ist immer eine Schraubenlinie, und ihre Binormalen sind stets parallel den Hauptnormalen einer Geodätischen auf der Tangentenfläche.

Die Richtungscosinus der Tangente und der Hauptnormalen einer Schraubenlinie haben der Reihe nach die Werte

$$(2)\qquad \begin{cases} \alpha_1 = -\dfrac{\sin v}{\sqrt{1+m^2}}, & \beta_1 = \dfrac{\cos v}{\sqrt{1+m^2}}, & \gamma_1 = \dfrac{m}{\sqrt{1+m^2}}, \\ l_1 = -\cos v, & m_1 = -\sin v, & n_1 = 0. \end{cases}$$

Dabei ist $m = \operatorname{ctg} \delta$ das konstante Steigungsverhältnis der Schraubenlinie.

---

[1]) Schell-Salkowski, Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung. Leipzig 1914. S. 133.

Dann lauten die Gleichungen der geodätischen Linien auf Böschungsflächen [1])

$$(3) \qquad x = \int \alpha \, ds, \quad y = \int \beta \, ds, \quad z = \int \gamma \, ds.$$

Hierin sind die Richtungscosinus der Tangente der Geodätischen

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha = \alpha_1 \cos\vartheta - l_1 \sin\vartheta, \quad \beta = \beta_1 \cos\vartheta - m_1 \sin\vartheta, \\ \gamma = \gamma_1 \cos\vartheta - n_1 \sin\vartheta, \end{cases}$$

wo

$$\vartheta = n \cdot v = \frac{v}{\sqrt{1 + m^2}}$$

ist.

Ist ferner $d\tau$ der Winkel benachbarter Tangenten und $d\sigma$ der Winkel benachbarter Binormalen, so gelten die Beziehungen [1]):

$$(5) \qquad d\tau = m \sin\vartheta \, d\vartheta, \quad d\sigma = m \cos\vartheta \, d\vartheta.$$

Diese Gleichungen gelten für alle geodätischen Linien auf den Tangentenflächen von Schraubenlinien. Unter ihnen erhält man diejenigen, für welche $\varkappa^2 h = \tau$ ist, wenn man den Wert des Bogenelements aus der Gleichung

$$(6) \qquad ds = h \frac{d\tau^2}{d\sigma} = h m n \frac{\sin^2 n v}{\cos n v} \, dv$$

in die Gleichungen (3) einsetzt.

Demnach lauten die Gleichungen derjenigen geodätischen Linien auf Böschungsflächen, deren Torsion proportional dem Quadrate der Krümmung ist,

$$(7) \quad \begin{cases} x = h m n \int \left[\dfrac{\sin^3 (n v) \cos v}{\cos (n v)} - \dfrac{1}{n} \sin v \sin^2 (n v) \right] dv, \\ y = h m n \int \left[\dfrac{\sin^3 (n v) \sin v}{\cos (n v)} + \dfrac{1}{n} \cos v \sin^2 (n v) \right] dv, \\ z = h m^2 n^2 \int \sin^2 (n v) \, dv. \end{cases}$$

Ferner ergibt sich aus den Gleichungen (5) für die Krümmung

$$(8) \qquad \varkappa = \frac{1}{h} \operatorname{ctg} (n v)$$

[1]) E. Salkowski, Beiträge zur Kenntnis der Bertrandschen Kurven. Math. Annalen 69, S. 560—579.

und für die Torsion

$$\tau = \frac{1}{h} \operatorname{ctg}^2(nv). \tag{9}$$

Die Integrale (7) lassen sich leicht ausführen, wenn n zweckmäfsig gewählt wird. Es sei $n = \frac{1}{2}$, also $m^2 = 3$.

Dann lauten die Gleichungen der Geodätischen

$$\begin{cases} x = \frac{h}{2}\sqrt{3}\left\{\frac{1}{2}\sin^4\frac{v}{2} + \sin^2\frac{v}{2} + 2\lg\cos\frac{v}{2}\right\}, \\ y = \frac{h}{2}\sqrt{3}\left\{-\left(\frac{1}{2}\sin^3\frac{v}{2} + \frac{5}{4}\sin\frac{v}{2}\right)\cos\frac{v}{2} + \frac{5}{8}v\right\}, \\ z = \frac{3}{8}h\,(v - \sin v), \end{cases} \tag{10}$$

und es wird weiter

$$x = \frac{1}{h}\operatorname{ctg}\frac{v}{2}, \quad \tau = \frac{1}{h}\operatorname{ctg}^2\frac{v}{2}, \quad ds = \frac{h}{2}\sqrt{3}\,\frac{\sin^2\frac{v}{2}}{\cos\frac{v}{2}}\,dv. \tag{11}$$

Die Richtungscosinus der Tangente, Hauptnormalen und Binormalen sind der Reihe nach

$$\alpha = -\sin^3\frac{v}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}\cos\frac{v}{2}\left(1 + 2\sin^2\frac{v}{2}\right), \quad \gamma = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\frac{v}{2}, \tag{12}$$

$$l = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\sin v, \quad m = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos v, \quad n = -\frac{1}{2}; \tag{13}$$

$$\lambda = -\cos^3\frac{v}{2}, \quad \mu = -\frac{1}{2}\sin\frac{v}{2}\left(1 + 2\cos^2\frac{v}{2}\right), \quad \nu = \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin\frac{v}{2}. \tag{14}$$

Die Hauptnormalen der Geodätischen sind also den Binormalen der Schraubenlinie entgegengesetzt gerichtet.

Die Leitfläche des von den Cesàroschen Geraden gebildeten Strahlensystems ist die Tangentenfläche der Geodätischen. Ihre Gleichungen sind

$$\begin{cases} x_1 = x + \frac{2h}{\sin 2\varphi}\sin^3\frac{v}{2}, \quad y_1 = y - \frac{h\cos\frac{v}{2}}{\sin 2\varphi}\left(1 + 2\sin^2\frac{v}{2}\right), \\ z_1 = z - \frac{h\cos\frac{v}{2}}{\sqrt{3}\sin 2\varphi}, \end{cases} \tag{15}$$

und die Fundamentalgrößen erster Ordnung werden

$$(16)\quad \begin{cases} E = \left(\frac{h}{2}\sqrt{3}\,\frac{\sin^3\frac{v}{2}}{\cos\frac{v}{2}}\right)^2\left(1+\frac{4\operatorname{ctg}^2\frac{v}{2}}{\sin^2 2\varphi}\right), \\ F = \frac{2\sqrt{3}\,h^2\sin^2\frac{v}{2}\cos 2\varphi}{\cos\frac{v}{2}\sin^2 2\varphi}, \qquad G = \left(\frac{4h\cos 2\varphi}{\sin^2 2\varphi}\right)^2. \end{cases}$$

Demnach hat das Bogenelement die Form

$$(17)\quad ds^2 = \left(\frac{h^2\sqrt{3}\sin\frac{v}{2}}{\sin 2\varphi}\right)^2 dv^2 + \left(\frac{h}{2}\sqrt{3}\,\frac{\sin^2\frac{v}{2}}{\cos\frac{v}{2}}\,dv + \frac{4h\cos 2\varphi}{\sin^2 2\varphi}\,d\varphi\right)^2.$$

Da die Leitfläche in die Ebene abwickelbar ist, so sind die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung

$$(18)\quad L = \frac{3}{8}h\frac{\sin v}{\sin 2\varphi}, \qquad M = 0, \qquad N = 0$$

und das Krümmungsmaß ist Null. Für die mittlere Krümmung ergibt sich

$$(19)\quad H = \frac{1}{h}\operatorname{ctg}\frac{v}{2}\sin 2\varphi.$$

Schließlich wird noch für den Winkel ω der Parameterlinien

$$(20)\quad \operatorname{tg}\omega = \frac{2\operatorname{ctg}\frac{v}{2}}{\sin 2\varphi}.$$

Die Abstände der einem bestimmten Punkte der Ausgangskurve entsprechenden Brennpunkte von der Tangente sind

$$(21)\quad \varrho_1 = \frac{h\operatorname{tg}\frac{v}{2}}{\cos\varphi}, \qquad \varrho_2 = \frac{4h\operatorname{ctg}\frac{v}{2}\cos 2\varphi}{\cos\varphi\sin^2 2\varphi}.$$

Hier gilt natürlich ebenfalls der im VI. Abschnitte gefundene Satz, daß für eine bestimmte Cesàrosche Gerade das Produkt

der Brennpunktsabstände von der Tangente während des ganzen Verlaufes der Kurve konstant ist.

Die Gleichungen der ersten Brennfläche lauten

$$(22)\quad \begin{cases} \bar{\xi}_1 = \dfrac{h}{2}\sqrt{3}\left\{\dfrac{1}{2}\sin^4\dfrac{v}{2} + \dfrac{1}{2}\sin^2\dfrac{v}{2} + 2\lg\cos\dfrac{v}{2}\right\} \\ \quad + \dfrac{2h\sin\dfrac{v}{2}}{\sin 2\varphi}\left(\sin^2\dfrac{v}{2} - \cos^2\dfrac{v}{2}\sin^2\varphi\right), \\ \bar{\eta}_1 = \dfrac{h}{2}\sqrt{3}\left\{-\left(\dfrac{1}{2}\sin^3\dfrac{v}{2} + \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{v}{2}\right)\cos\dfrac{v}{2} - \sin^2\dfrac{v}{2}\operatorname{tg}\dfrac{v}{2} + \dfrac{5}{8}v\right\} \\ \quad - \dfrac{h\cos\dfrac{v}{2}}{\sin 2\varphi}\left\{\left(1 + 2\sin^2\dfrac{v}{2}\right) + \sin^2\varphi\operatorname{tg}^2\dfrac{v}{2}\left(1 + 2\cos^2\dfrac{v}{2}\right)\right\}, \\ \bar{\zeta}_1 = \dfrac{h}{2}\left\{\dfrac{3}{4}v - \operatorname{tg}\dfrac{v}{2}\left(2 + 3\cos^2\dfrac{v}{2}\right)\right\} - \dfrac{h}{2}\sqrt{3}\,\dfrac{\cos^2\dfrac{v}{2} - \sin^2\dfrac{v}{2}\sin^2\varphi}{\sin 2\varphi\cos\dfrac{v}{2}}. \end{cases}$$

Die zu einem bestimmten Punkte der Geodätischen gehörigen ersten Brennpunkte liegen auf einer Hyperbel. Ihre Gleichung lautet, wenn sie durch Drehung der Hauptachse um den Winkel $\psi = \dfrac{v}{4}$ auf die x'- und z'-Achse transformiert wird,

$$(23)\qquad \frac{x'^2}{A^2} - \frac{y'^2}{B^2} - 1 = 0,$$

wobei zu setzen ist:

$$A^2 = \frac{h^2\operatorname{tg}\dfrac{v}{2}\sin\dfrac{v}{2}}{\sin^2\dfrac{v}{4}}, \qquad B^2 = \frac{h^2\operatorname{tg}\dfrac{v}{2}\sin\dfrac{v}{2}}{\cos^2\dfrac{v}{4}}.$$

Die Parameter der ersten Brennfläche sind v und φ. Es ergibt sich für die Fundamentalgrößen erster Ordnung

$$(24)\quad \begin{cases} E_1 = \dfrac{3h^3}{4}\left(\dfrac{\sin\dfrac{v}{2}}{\sin\varphi} + \dfrac{1}{\sqrt{3}\cos^2\dfrac{v}{2}}\right), \quad F_1 = -\dfrac{h}{\cos\varphi}\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\dfrac{v}{2}\sqrt{E_1}, \\ G_1 = \dfrac{h^2}{\cos^4\varphi}\left(\operatorname{tg}^2\dfrac{v}{2} + \dfrac{\cos^2 2\varphi}{\sin^4\varphi}\right), \end{cases}$$

so dafs das Bogenelement wird

$$(25)\qquad ds_1^2 = \left\{\sqrt{E_1}\,dv - \frac{h}{\cos\varphi}\,\mathrm{tg}\frac{v}{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi\,d\varphi\right\}^2 + \frac{D_1^2}{E_1}\,d\varphi^2,$$

wobei zu setzen ist

$$(26)\qquad D_1 = \frac{\sqrt{E_1}\,\mathrm{ctg}\frac{v}{2}}{h\cos\varphi\sin^2 2\varphi}\sqrt{\sin^4 2\varphi + 16\,\mathrm{ctg}^2\frac{v}{2}\cos^2\varphi\cos^2 2\varphi}.$$

Die Parameterlinien auf der ersten Brennfläche bilden miteinander den Winkel ω_1, der bestimmt ist durch

$$(27)\qquad \mathrm{tg}\,\omega_1 = -\frac{1}{\sin^3\varphi}\sqrt{\sin^4\varphi\cos^2\varphi + \mathrm{ctg}^2\frac{v}{2}\cos^2 2\varphi}.$$

Die Raumkurve, auf der die einem bestimmten Punkte der Geodätischen entsprechenden zweiten Brennpunkte liegen, hat die Gleichungen

$$(28)\qquad \xi_2' = -\frac{2h}{\sin 2\varphi},\quad \eta_2' = -\frac{4h\,\mathrm{ctg}\frac{v}{2}\cos 2\varphi}{\sin^2 2\varphi},\quad \zeta_2' = -\frac{4h\,\mathrm{ctg}\frac{v}{2}\cos 2\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi}{\sin^2 2\varphi}.$$

Ihr Bogenelement ist

$$(29)\qquad ds^2 = \frac{4h^2\,d\varphi^2}{\cos^4\varphi\sin^4 2\varphi}\left\{\cos^4\varphi\sin^2 4\varphi + 4\,\mathrm{ctg}^2\frac{v}{2}\left[\sin^4 2\varphi\,(1-\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi)^2 + 4\cos^4\varphi\,(1-\cos^2 2\varphi)^2\right]\right\}.$$

Aus der Leitfläche werden von den beiden Scharen von abwickelbaren Flächen des Strahlensystems die Kurven K_1 und K_2 ausgeschnitten. Die Gleichungen der Kurven K_1 sind

$$(30)\qquad \begin{cases} x_1 = x + \dfrac{2h}{\sin 2\varphi}\sin^2\dfrac{v}{2}, & y_1 = y - \dfrac{h\cos\frac{v}{2}}{\sin 2\varphi}\left(1 + 2\sin^2\dfrac{v}{2}\right), \\ z_1 = z - \dfrac{h\cos\frac{v}{2}}{\sin 2\varphi}. \end{cases}$$

Dabei ist $\varphi = \mathrm{const}$.

Für die Kurven K_2 ist

$$(31)\qquad \frac{d\varphi}{dv} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\frac{v}{2} - \frac{1}{8}\sqrt{3}\,\frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}\cdot\frac{\sin^2\frac{v}{2}}{\cos\frac{v}{2}}.$$

Diese Differentialgleichung für φ ist nicht lösbar.

Die Gratlinien der von den Cesàroschen Geraden längs der Kurven K_1 beschriebenen abwickelbaren Flächen haben die Gleichungen

$$
(32)\quad
\begin{cases}
\bar{\xi}' = \dfrac{h}{2}\sqrt{3}\left\{\dfrac{1}{2}\sin^4\dfrac{r}{2} + \dfrac{1}{2}\sin^2\dfrac{r}{2} + 2\lg\cos\dfrac{r}{2}\right\} \\
\quad + \dfrac{2h\sin\dfrac{v}{2}}{\sin 2\varphi}\left(\sin^2\dfrac{v}{2} - \cos^2\dfrac{v}{2}\sin^2\varphi\right). \\
\bar{\eta}' = \dfrac{h}{2}\sqrt{3}\left\{-\left(\dfrac{1}{2}\sin^3\dfrac{v}{2} + \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{v}{2}\right)\cos\dfrac{v}{2} - \sin^2\dfrac{v}{2}\operatorname{tg}\dfrac{v}{2} + \dfrac{5}{8}r\right\} \\
\quad - \dfrac{h\cos\dfrac{v}{2}}{\sin 2\varphi}\left\{\left(1 + 2\sin^2\dfrac{r}{2}\right) + \sin^2\varphi\operatorname{tg}^2\dfrac{v}{2}\left(1 + 2\cos^2\dfrac{v}{2}\right)\right\}, \\
\bar{\zeta}' = \dfrac{h}{2}\left\{\dfrac{3}{4}r - \operatorname{tg}\dfrac{v}{2}\left(2 + 3\cos^2\dfrac{v}{2}\right)\right\} - \dfrac{h}{2}\sqrt{3}\,\dfrac{\cos^2\dfrac{r}{2} - \sin^2\dfrac{v}{2}\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi\cos\dfrac{v}{2}}.
\end{cases}
$$

Die Richtungscosinus der Tangente, Haupt- und Binormalen einer solchen Gratlinie, bezogen auf das Hauptdreikant der Geodätischen, sind der Reihe nach:

$$
(33)\quad
\begin{cases}
\alpha' = 0, \qquad \beta' = \cos\varphi, \qquad \gamma' = \sin\varphi; \\
l' = \dfrac{-\cos\varphi\sin\dfrac{v}{2}}{\sqrt{\cos^2\dfrac{v}{2} + \sin^2\dfrac{v}{2}\cos^2\varphi}}, \quad m' = \dfrac{\sin\varphi\cos\dfrac{r}{2}}{\sqrt{\cos^2\dfrac{v}{2} + \sin^2\dfrac{v}{2}\cos^2\varphi}}, \\
n' = \dfrac{-\cos\varphi\cos\dfrac{r}{2}}{\sqrt{\cos^2\dfrac{v}{2} + \sin^2\dfrac{r}{2}\cos^2\varphi}}; \\
\lambda' = \dfrac{-\cos\dfrac{v}{2}}{\sqrt{\cos^2\dfrac{r}{2} + \sin^2\dfrac{r}{2}\cos^2\varphi}}, \quad \mu' = \dfrac{-\sin\varphi\cos\varphi\sin\dfrac{r}{2}}{\sqrt{\cos^2\dfrac{v}{2} + \sin^2\dfrac{v}{2}\cos^2\varphi}}, \\
\nu' = \dfrac{\cos^2\varphi\sin\dfrac{v}{2}}{\sqrt{\cos^2\dfrac{v}{2} + \sin^2\dfrac{v}{2}\cos^2\varphi}}.
\end{cases}
$$

Ferner ist

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{2\left(\sqrt{3}\cos\varphi\sin v\cos\frac{v}{2} - 2\sin\varphi\right)}{\sqrt{3}\sin 2\varphi\sin v\sin\frac{v}{2}} \tag{34}$$

Für die Krümmung erhält man

$$\varkappa' = \frac{1}{h}\operatorname{ctg}\frac{v}{2}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{v}{2} + \cos^2\varphi}\,\frac{ds}{ds'} \tag{35}$$

und für die Torsion

$$\tau' = \int \frac{\cos\varphi\cos\frac{v}{2}}{h^3\sqrt{3}\sin^2\frac{v}{2}\left(\cos^2\frac{v}{2} + \sin^2\frac{v}{2}\cos^2\varphi\right)} - \frac{1}{h}\sin\varphi\operatorname{ctg}\frac{v}{2}\Bigg| \frac{ds}{ds'}. \tag{36}$$

Mit Hilfe der Formeln (9) im IV. Abschnitte kann man auch eine besondere Klasse von Kurven

$$\varkappa\cos\varepsilon + \tau\sin\varepsilon = \frac{\tau}{\varkappa h}$$

finden, da die Kurven konstanter Krümmung, die den eben dargestellten Kurven parallel zugeordnet sind, bekannt sind.

VIII. Eine Beziehung zu den Bertrandschen Kurven.

Der Gratlinienpunkt P der von einer Cesàroschen Geraden beschriebenen abwickelbaren Fläche liegt in der rektifizierenden Ebene der Polarkurve K_1 und hat von deren Schmiegungsebene den Abstand

$$a = -\frac{2h\cos\varepsilon}{\sin 2\varphi}. \tag{1}$$

Wird P festgehalten, reduziert sich also die eingehüllte Kurve auf einen Punkt, so hat die Normalebene der Ausgangs-

kurve C oder die Schmiegungsebene von K_1 von dem festen Punkte P den konstanten Abstand a. Da die Kurven, deren Normalebenen von einem festen Punkte konstanten Abstand haben, Planevolventen von Kegelgeodätischen sind,[1]) so ist C eine Planevolvente der Polarkurve K_1, und diese ist eine Geodätische auf einer Kegelfläche, deren Spitze in P liegt. Der Punkt K_1 der Polarkurve hat vom Krümmungsmittelpunkt C_0 der Ausgangskurve den Abstand $\varrho \operatorname{ctg} \varphi$, so dafs der Schmiegungskugelradius mit der Krümmungsachse von C, d. h. mit der Tangente von K_1 den konstanten Winkel φ einschliefst. Als Planevolvente von K_1 reduziert sich die Ausgangskurve bei der Abwicklung der Polarfläche auf einen Punkt C. Die Strahlen von diesem aus nach den Punkten der Gratlinie bilden mit deren Tangenten konstante Winkel φ. Demnach verwandelt sich die Polarkurve bei der Abwicklung ihrer Tangentenfläche in die Ebene in eine logarithmische Spirale, denn bei dieser schneiden sich die vom Pol aus gezogenen Strahlen und die Tangenten unter einem konstanten Winkel.[2])

Analytisch ergibt sich aus Gleichung (16) im III. Abschnitte

$$ds_1 = -\left(\frac{\tau}{\varkappa \sin \varphi} + \frac{\varkappa'}{\varkappa^2 \cos \varphi}\right) ds$$

als Bedingung dafür, dafs eine eingehüllte Kurve sich auf einen Punkt reduziert, die Gleichung

$$\frac{\tau}{\varkappa} = -\frac{\varkappa'}{\varkappa^2} \operatorname{tg} \varphi$$

oder

$$\varrho' = \frac{\varrho}{r} \operatorname{ctg} \varphi. \tag{2}$$

Da nach der speziellen Cesàroschen Bedingung

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{h \cos \varepsilon}{\varrho - h \sin \varepsilon} \tag{3}$$

ist, so folgt hieraus

$$\varrho^2 - 2\varrho h \sin \varepsilon = 2h \operatorname{ctg} \varphi \cos \varepsilon \bar{s}. \tag{4}$$

[1]) Schell-Salkowski, Kurven doppelter Krümmung. S. 188.
[2]) E. Cesàro, Natürliche Geometrie. S. 26.

Verschiebt man den Anfangspunkt dieser Kurve (4) so, dafs

$$s = \frac{1}{2h \operatorname{ctg}\varphi \cos\varepsilon}(h^2 \sin^2\varepsilon + 2h \operatorname{ctg}\varphi \cos\varepsilon\, \bar{s})$$

wird, dann erhält man

$$\varrho = h \sin\varepsilon \pm \sqrt{2h \operatorname{ctg}\varphi \cos\varepsilon\, \bar{s}}. \tag{5}$$

Demnach ist die Bogenlänge

$$s = \frac{(\varrho - h\sin\varepsilon)^2}{2h \operatorname{ctg}\varphi \cos\varepsilon}. \tag{6}$$

Die Gleichung (6) stellt eine Kurve dar, die, isometrisch auf eine Kreisevolvente bezogen, in entsprechenden Punkten stets einen um $h \sin\varepsilon$ gröfseren Krümmungsradius besitzt als jene. Mit zunehmender Bogenlänge geht sie mehr und mehr in eine Kreisevolvente über.

Aus Gleichung (5) folgt

$$d\tau' = \frac{ds}{h\sin\varepsilon \pm \sqrt{2h \operatorname{ctg}\varphi \cos\varepsilon\, s}}, \tag{7}$$

also

$$\tau' = \operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\varepsilon \left\{ 1 \pm \frac{\sqrt{2h \operatorname{ctg}\varphi \cos\varepsilon\, s}}{h\sin\varepsilon} - \lg\left(1 \pm \frac{\sqrt{2h \operatorname{ctg}\varphi \cos\varepsilon\, s}}{h\sin\varepsilon}\right) \right\}. \tag{8}$$

Dann lauten die endlichen Gleichungen der Kurve (6)

$$x = \int \cos\tau'\, ds, \qquad y = \int \sin\tau'\, ds. \tag{9}$$

Für die Polarkurve gelten nun die Beziehungen:[1])

$$\varrho_1 = R\left|\frac{dR}{d\varrho}\right| = \left|\varrho + \frac{dh}{d\sigma}\right|, \quad r_1 = -\varrho\frac{R\,dR}{r\,d\varrho}, \quad ds_1 = |dh_0 + \varrho\, d\sigma|. \tag{10}$$

In unserem Falle ist

$$h_0 = \varrho \operatorname{ctg}\varphi, \qquad R = \frac{\varrho}{\sin\varphi}, \tag{11}$$

[1]) Schell-Salkowski, Kurven doppelter Krümmung. Leipzig 1914. S. 54 f.

und es wird daher

$$(12)\quad \varrho_1 = \frac{\varrho}{\sin^2\varphi}, \quad r_1 = \frac{-h\cos\varepsilon}{\sin^2\varphi\,(1-h\varkappa\sin\varepsilon)}, \quad s_1 = \frac{\varrho}{\sin\varphi\cos\varphi}.$$

Hieraus ergibt sich die Beziehung

$$(13)\quad \frac{\varrho_1}{s_1} = \operatorname{ctg}\varphi = \text{const.}$$

d. h. die Polarkurve geht nach Abwicklung ihrer Tangentenfläche in die Ebene in eine logarithmische Spirale über.[1])

Verschiebt man den Anfangspunkt der Polarkurve so, daß

$$\bar{s}_1 = \frac{\varrho - h\sin\varepsilon}{\sin\varphi\cos\varphi}$$

ist, so erhält man die Beziehung

$$(14)\quad \frac{\varrho_1}{r_1} = \frac{h\sin\varepsilon - \varrho}{h\cos\varepsilon} = \frac{\bar{s}_1}{l_1},$$

wobei

$$l_1 = a = -\frac{2h\cos\varepsilon}{\sin 2\varphi}$$

ist. Die Polarkurve ist also eine Kegelgeodätische,[2]) wie sich schon geometrisch ergeben hatte.

Durch Elimination von ϱ erhält man zwischen der Krümmung $\frac{1}{\varrho_1}$ und der Torsion $\frac{1}{r_1}$ der Polarkurve K_1 die Relation

$$(15)\quad -\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{r_1}\operatorname{ctg}\varepsilon = \frac{1}{a_1},$$

wobei

$$(16)\quad a_1 = -\frac{h\sin\varepsilon}{\sin^2\varphi}$$

ist. Die Polarkurve ist also eine Bertrandsche Kurve. Auf der Fläche ihrer Hauptnormalen gibt es im konstanten Ab-

[1]) E. Cesàro, Natürliche Geometrie. Leipzig 1901. S. 14.

[2]) Schell-Salkowski, Kurven doppelter Krümmung. Leipzig 1914. S. 68.

stande a_1 eine zweite Kurve, welche mit ihr eine gemeinschaftliche Fläche der Hauptnormalen besitzt und deren Tangenten gegen die Tangenten der Polarkurve K_1 unter dem Winkel ε geneigt sind.[1])

Für die zugeordnete Bertrandsche Kurve ist

$$(17)\quad \begin{cases} \bar{\varrho} = \dfrac{h}{\sin^2\varphi}\,\dfrac{\varrho - h\sin\varepsilon}{h - \varrho\sin\varepsilon}, & r_1 = \dfrac{-h}{\varrho\sin^2\varphi\cos\varepsilon}\,(\varrho - h\sin\varepsilon), \\ ds_1 = \dfrac{\varrho - h\sin\varepsilon}{\varrho\cos\varepsilon\sin\varphi\cos\varphi}\,d\varrho, & s_1 = \dfrac{\varrho - h\sin\varepsilon\,\lg\varrho}{\sin\varphi\cos\varphi\cos\varepsilon}. \end{cases}$$

Es hat sich also folgendes ergeben:

Verbiegt man eine Kurve (6) so, dafs ihre Tangenten geradlinig bleiben und sie in eine spezielle Cesàrosche Kurve übergeht, so beschreibt eine ihrer Cesàroschen Geraden einen Kegel. Durch die Kegelspitze geht gleichzeitig ein zweiter Kegel, auf dem die Polarkurve geodätisch liegt. Diese ist eine Bertrandsche Kurve, die nach Abwicklung ihrer Tangentenfläche in die Ebene eine logarithmische Spirale ergibt.

Eine Bertrandsche Kurve hat nun mit der ihr zugeordneten die zweite rektifizierende Fläche gemeinsam.[2]) Da die erste Bertrandsche Kurve eine Kegelgeodätische ist, so mufs die zweite rektifizierende Fläche der zugeordneten Kurve durch die Kegelspitze P gehen, also selbst ein Kegel sein, auf dem die rektifizierende Gratlinie der zweiten Bertrandschen Kurve geodätisch ist.

Die natürlichen Gleichungen dieser Gratlinie lauten:

$$(18)\quad \begin{cases} \varrho_3 = \dfrac{\operatorname{tg}\varepsilon\,(h^2 + h\varrho\sin\varepsilon - 2\varrho^2)}{h^2\varrho^2\cos^2\varepsilon\sin\varphi\cos\varphi}\sqrt{\varrho^2 + h^2 - 2h\varrho\sin\varepsilon}^3, \\ r_3 = \dfrac{\operatorname{tg}\varepsilon}{\varrho\sin^2\varphi}\,(h^2 + h\varrho\sin\varepsilon - 2\varrho^2), \\ s_3 = \dfrac{\operatorname{tg}\varepsilon\sqrt{\varrho^2 + h^2 - 2h\varrho\sin\varepsilon}^3}{h\varrho\cos\varepsilon\sin\varphi\cos\varphi}. \end{cases}$$

[1]) Schell-Salkowski, Kurven doppelter Krümmung. Leipzig 1914. S. 125.

[2]) Salkowski, Beiträge zur Kenntnis der Bertrandschen Kurven. Math. Ann. 69, S. 560—79.

Daraus ergibt sich die Beziehung

$$\frac{\varrho_3}{r_3} = \frac{s_3}{l_3},$$

die besagt, dafs die rektifizierende Gratlinie eine Kegelgeodätische ist. Dabei ist $l_3 = \frac{h \operatorname{tg} \varepsilon}{\sin^2 \varphi}$.

Legt man durch den Kurvenpunkt C zu der durch P gehenden Cesàroschen Geraden eine Parallele, so schneidet diese die Krümmungsachse im Punkte S. Dieser ist die Spitze des Schmiegungskegels der Ausgangskurve. Die Kurve der Schmiegungskegelspitzen ist eine Filarevolvente der Polarkurve K und eine sphärische Kurve, da S von dem festen Punkte P den konstanten Abstand $-\frac{2h}{\sin 2\varphi}$ hat. Ihre Krümmungsradien und die Bogenlänge sind

$$(19) \quad \begin{cases} \bar{\varrho}_0 = \dfrac{2h\varrho\cos\varepsilon}{\sin 2\varphi \sqrt{\varrho^2 + h^2 - 2h\varrho\sin\varepsilon}}, & r_0 = \dfrac{\varrho^2 + h^2 - 2h\varrho\sin\varepsilon}{h\cos\varepsilon\cos^2\varphi}, \\ s_0 = \dfrac{\varrho}{\cos^2\varphi}. \end{cases}$$

Die Krümmungsmittelpunktkurve C' und die Kurve der Schmiegungskegelspitzen liegen auf den Krümmungsachsen, also auf den Tangenten der Polarkurve. Wickelt man die Polarfläche in die Ebene ab, so geht die Krümmungsmittelpunktkurve in die Fufspunktskurve der Lote vom Pol auf die Tangenten der logarithmischen Spirale über, ist also wieder eine logarithmische Spirale. Ihr Krümmungsradius und die Bogenlänge sind

$$(20) \qquad \bar{\varrho} = \varrho_0 \sin\varphi, \qquad \bar{s}_1 = \varrho_0 \sin\varphi \operatorname{tg}\varphi.$$

Die Kurve der Schmiegungskegelspitzen ist eine Evolvente der Polarkurve, also auch eine logarithmische Spirale. Sie ist der Ort der Schnittpunkte der Tangenten mit den Loten im Nullpunkte auf den Strahlen nach den entsprechenden Punkten der logarithmischen Spirale.

Von Interesse ist noch der Fall, dafs der Winkel ε zu Null wird, wenn also für die Ausgangskurve C die Torsion proportional dem Quadrate der Krümmung ist. Dann beschreibt eine der Cesàroschen Geraden eine Kegelfläche, wenn

(21) $$s = \frac{\varrho^2}{2h \operatorname{ctg} \varphi}$$

ist, d. h. die Kurve C mufs eine tordierte Kreisevolvente sein, deren erzeugender Kreis den Radius $h \operatorname{ctg} \varphi$ hat.

Die im vorigen Falle auftretenden Bertrandschen Kurven fallen in eine zusammen, und die Polarkurve geht in eine Kegelgeodätische konstanter Torsion über. Ihre natürlichen Gleichungen sind

(22) $$\varrho_1 = \frac{\varrho}{\sin^2 \varphi}, \quad r_1 = \frac{-h}{\sin^2 \varphi}, \quad s_1 = \frac{\varrho}{\sin \varphi \cos \varphi}.$$

Für die zweite Polarkurve wird

(23) $$h_1 = \frac{-h \operatorname{ctg} \varphi}{\sin^2 \varphi}, \quad R_1 = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \sqrt{\varrho^2 + h^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi}$$

und

(24) $$\varrho_2 = \frac{\varrho}{\sin^2 \varphi} = \varrho_1, \quad r_2 = \frac{\varrho^2}{h \sin^2 \varphi}, \quad s_2 = \frac{\varrho^2}{h \sin 2\varphi}.$$

Sie ist wieder eine Kurve, deren Torsion proportional dem Quadrate der Krümmung ist, und geht aus einer Kreisevolvente

(25) $$\varrho_2^2 = \frac{2h \operatorname{ctg} \varphi}{\sin^2 \varphi} s_2$$

hervor.

Geometrisch findet man zunächst den Punkt K_1 der ersten Polarkurve als den Schnittpunkt der Krümmungsachse mit dem Lot in C auf der Parallelen SC zu der durch P gehenden Cesàroschen Geraden. Diese Parallele schneidet die Hauptnormale der ersten Polarkurve in C_1 so, dafs $K_1 C_1 = \varrho_1$ wird, C_1 ist also der Krümmungsmittelpunkt der ersten Polarkurve. Der Punkt K_2 der zweiten Polarkurve hat vom Krümmungsmittelpunkt C_1 den Abstand $h_1 = \frac{-h \operatorname{ctg} \varphi}{\sin^2 \varphi}$, er ist also der Schnittpunkt der Geraden $P'C'$ mit der Krümmungsachse von K_1. Die erste Polarkurve gehört demnach zu den Kurven, für die der Schmiegungskugelmittelpunkt und Krümmungsmittelpunkt einen konstanten Abstand besitzen.[1])

[1]) Schell-Salkowski, Kurven doppelter Krümmung. Leipzig 1914. S. 57.

Verbindet man ferner K_2 mit der Kegelspitze P, so geht diese Gerade auch durch C, d. h. die Ausgangskurve liegt mit ihrer zweiten Polarkurve auf einem Kegel. Dann liegen auf dem-

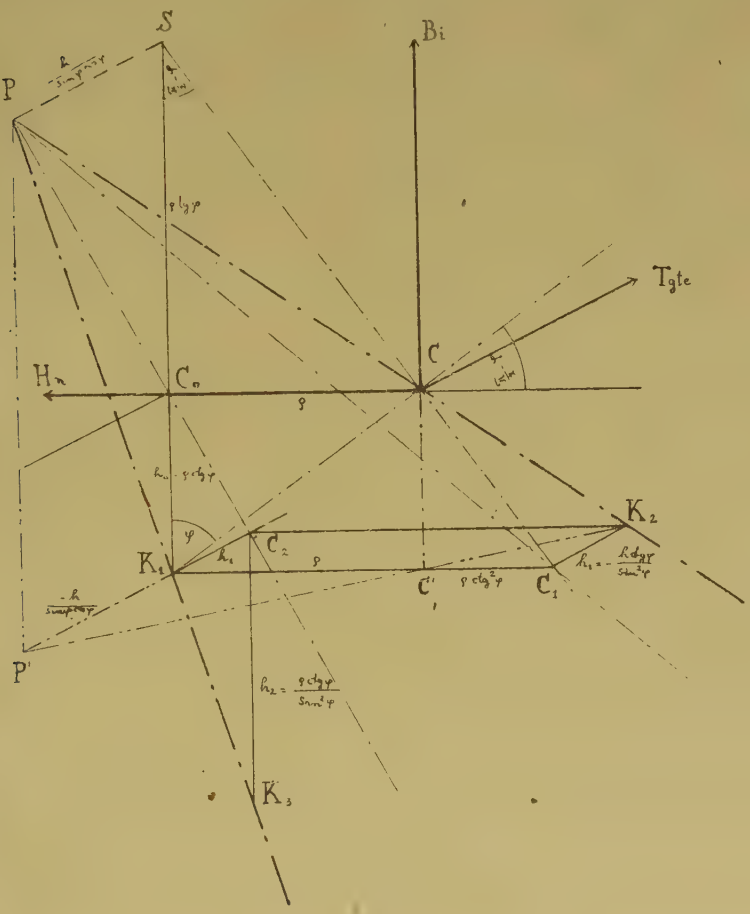

Fig. 2.

selben Kegel alle weiteren Polarkurven gerader Ordnung, die Polarkurven ungerader Ordnung dagegen auf einem zweiten Kegel, der ebenfalls die Spitze P hat.[1]) Die zu K_1 gehörigen Punkte der letzteren liegen also auf der Geraden PK_1.

[1]) a. a. O. S. 180.

Die Polarkurven gerader Ordnung sind der Ausgangskurve parallel,[1]) also Kurven, deren Torsion proportional dem Quadrate der Krümmung ist, während die Polarkurven ungerader Ordnung Kegelgeodätische konstanter Torsion sind. Die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte der Cesàroschen Kurven liegen alle auf der Geraden PC_0, die der Kegelgeodätischen auf der Geraden PC_1.[2])

Wir haben also folgende Beziehung erhalten:

Verbiegt man eine Kreisevolvente so, dafs ihre Tangenten geradlinig bleiben und sie in eine Kurve übergeht, deren Torsion proportional dem Quadrate der Krümmung ist, so geht eine der unendlich vielen Cesàroschen Geraden immer durch einen festen Punkt. Dieser ist die Spitze eines Kegels, auf dem die Polarkurven ungerader Ordnung geodätisch liegen. Letztere haben konstante Torsion und gehen nach Abwicklung ihrer Tangentenflächen in die Ebene in logarithmische Spiralen über. Die Polarkurven gerader Ordnung sind der Ausgangskurve parallel und liegen mit ihr auf einem zweiten Kegel, dessen Spitze ebenfalls der feste Punkt ist.

Wenn man von der ersten Polarkurve ausgeht, so findet man die tordierte Kreisevolvente folgendermafsen: Dreht man die Tangentenebenen des Kegels, auf dem die erste Polarkurve eine Geodätische konstanter Torsion ist, um die Kegelspitze parallel zur Binormalen um den Winkel $\frac{\pi}{2} - \eta$, so hüllen diese Ebenen einen zweiten Kegel ein, auf dem die Cesàrosche Kurve liegt. Diese erhält man, wenn man von der Kegelgeodätischen auf die zugehörigen Tangentenebenen des zweiten Kegels Lote fällt.

Die Gestalt der ersten Kegelfläche können wir ermitteln, indem wir ihren Schnitt mit einer Kugel vom Radius 1 bestimmen, deren Mittelpunkt die Kegelspitze ist.

Die Erzeugenden des Kegels sind die rektifizierenden Geraden der Geodätischen, zwei benachbarte Erzeugende schliefsen also den Winkel dH_1 ein. Demnach ist das Bogenelement der sphärischen Kurve gleich dH_1:

$$d\bar{s} = dH_1. \tag{26}$$

[1]) a. a. O. S. 174. [2]) a. a. O. S. 176.

Der Winkel zweier Tangenten $d\bar{\tau}_1$ ist gleich dem zweier rektifizierenden Ebenen oder benachbarter Hauptnormalen der Geodätischen, d. h. gleich dem Winkel der ganzen Krümmung dk_1. Daraus ergibt sich für die Krümmung der sphärischen Kurve

$$\bar{\varrho} = \frac{d\bar{s}}{d\bar{\tau}} = \frac{dH_1}{dk_1}. \tag{27}$$

Aus

$$\operatorname{ctg} H_1 = -\frac{s_1}{l_1} = -\frac{\varrho_1}{r_1}$$

folgt

$$dH_1 = -ds_1 \frac{\sin^2 H_1}{h} \sin\varphi \cos\varphi. \tag{28}$$

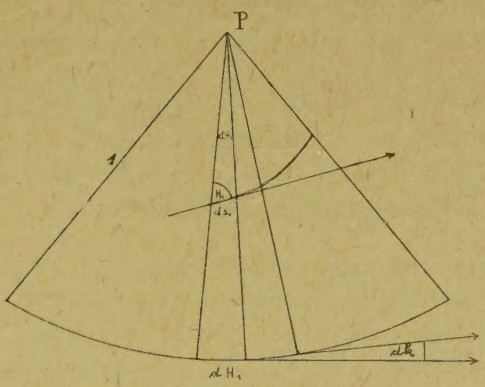

Fig. 3.

Ferner erhält man

$$dk_1 = -ds_1 \frac{\sin^2\varphi}{h \cos H_1}, \tag{29}$$

und demnach für den Krümmungsradius

$$\bar{\varrho} = \operatorname{ctg}\varphi \sin^2 H_1 \cos H_1. \tag{30}$$

Der Torsionsradius ergibt sich aus der Beziehung

$$\bar{\varrho}^2 + \left(\bar{r}\frac{d\bar{\varrho}}{d\bar{s}}\right)^2 = R^2 = 1.$$

Es ist

$$\bar{r} = \frac{\sqrt{1 - \operatorname{ctg}\varphi \sin^2 H_1 \cos H_1}}{\operatorname{ctg}\varphi \sin H \,(2\cos^2 H_1 - \sin^2 H_1)} \tag{31}$$

Es ist mir eine angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Geheimen Regierungsrat Professor Dr. Gutzmer, sowie Herrn Professor Dr. E. Salkowski in Hannover für die freundliche Anregung zu vorliegender Arbeit und für die wertvollen Ratschläge bei ihrer Ausführung auch an dieser Stelle meinen ergebensten Dank auszusprechen.

Lebenslauf.

Geboren bin ich, Bruno Spieweck, Sohn des Königlichen Revierförsters A. Spieweck, am 8. November 1893 zu Beinrode, Kreis Worbis, bin evangelischen Bekenntnisses und preufsischer Staatsangehöriger. Ich besuchte die Volksschulen zu Grofsbartloff und Friedrichslohra, die Mittelschule zu Bleicherode und das Kgl. Realgymnasium zu Nordhausen, das ich Ostern 1912 mit dem Zeugnis der Reife verliefs. Ich studierte Mathematik und Naturwissenschaften in Göttingen, Berlin, und seit Ostern 1914 in Halle. Bei Ausbruch des Krieges trat ich als Kriegsfreiwilliger im Füsilier-Regiment Nr. 36 ein, wurde am 2. Oktober 1914 schwer verwundet und am 1. März 1915 aus dem Militärdienst entlassen. Im Sommersemester 1915 setzte ich meine Studien in Halle fort. Die mündliche Doktorprüfung bestand ich am 31. Juli 1916.

Die Drucklegung wurde dadurch verzögert, dafs ich Anfang August 1916 wieder zum Heeresdienste eingezogen wurde. Ich kam nach zwei Monaten zu einer Mörserbatterie des Fufsartillerie-Regiments Nr. 8, wurde am 24. Mai 1917 abermals verwundet, kehrte bald darauf zur Truppe zurück, wurde am 1. August 1917 zur Flugzeugmeisterei Adlershof versetzt und gehörte bis zur Entlassung als Unteroffizier der Abteilung Flugversuche am Müritzsee an.

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren und Dozenten in Göttingen: Hecke, Landau, Peters, Pompecky, Riecke, v. Sanden, Toeplitz, Wallach, Weyl; in Berlin: Blasius, Einstein, Foerster, Helmert, Heymons, Knopp, Planck, F. E. Schulze; in Halle: Brüel, Dorn, Fries, Frischeisen-Köhler, Gutzmer, Haecker, Karsten, Menzer, Pringsheim, Ruhland, Schmidt, Wangerin.

Allen meinen verehrten Lehrern fühle ich mich zu dauerndem Danke verpflichtet.